R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Raúl Manasevich, Alfredo Núñez

Marzo 2009

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Índice

1. Introducción

Definición 1.1. *Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes se llama ecuación diferencial.*

En (1.1) y (1.2), y es la variable dependiente y t es la variable independiente, a, c son parámetros.

$$\frac{dy}{dt} = ae^t, \tag{1.1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c\frac{dy}{dt} + ay. \tag{1.2}$$

En (1.3), u es la variable dependiente, x e y son las variables independientes.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.3}$$

En las ecuaciones diferenciales la(s) variable(s) dependiente(s) es(son) la(s) incógnita(s) del problema.

1.1. Clasificación de ecuaciones diferenciales. Se mostrará a continuación la clasificación de las ecuaciones diferenciales de acuerdo a su tipo, a su orden y de acuerdo a si es lineal o no lineal.

Clasificación por tipo. Se dividen en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y en Ecuaciones Diferenciales Parciales o Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP).

(a) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, son aquellas que contienen derivadas de una o más variables dependientes con respecto a solamente una variable independiente. Las ecuaciones diferenciales ordinarias las vamos a abreviar por EDO o edo.

Ejemplos: los casos (1.1) y (1.2) y también (1.4)

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = h(t), \tag{1.4}$$

donde $h(t), a_0(t), \cdots, a_{n-1}(t)$ son funciones conocidas.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

(b) Ecuaciones Diferenciales Parciales, son aquellas que contienen derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes.

Ejemplos. La ecuación (1.3) que corresponde a la ecuación de Laplace y (1.5), (1.6) que corresponden a las ecuaciones del calor y de ondas respectivamente.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.6}$$

Clasificación por orden. El orden de una Ecuación Diferencial es el de la derivada de mayor orden que aparece en esta.

Ejemplos. La edo (1.7) es de orden 3.

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 5\frac{d^2 y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 7y = e^t, \tag{1.7}$$

Los ejemplos (1.3), (1.5) y (1.6) corresponden a EDPs de orden 2. Los ejemplos (1.1), (1.2) y (1.4) corresponden a EDOs de orden 1, 2 y n respectivamente.

Consideremos a continuación la expresión

$$F(t, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.8}$$

donde $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+2} \longmapsto \mathbb{R}$ y Ω es un abierto. (1.8) representa la ecuación diferencial ordinaria escalar más general de orden n.

Un ejemplo de una F es, para el caso de orden tres ($n = 3$), la función (1.9), que tiene como edo asociada a (1.10)

$$F(t, x_0, x_1, x_2, x_3) = a_0 x_0^2 + a_1 x_1^3 + a_2 \log|x_2| + e^{x_3} - h(t), \tag{1.9}$$

$$e^{y^{(3)}} + a_2 \log|y''| + a_1 (y')^3 + a_0 y^2 = h(t), \tag{1.10}$$

donde se supone que a_0, a_1, a_2 son constantes y $h(t)$ es una función conocida.

En lo que sigue vamos a suponer siempre la ecuación está resuelta para la derivada de mayor orden, esto significa que de (1.8) se puede despejar la derivada de mayor orden. A la expresión (1.11) vamos a llamarla forma normal de la ecuación escalar más general de orden n.

$$y^{(n)} = \tilde{F}(t, y, \cdots, y^{(n-1)}), \tag{1.11}$$

Clasificación según linealidad. Un caso importante es aquel en que la función F viene dada por (1.12), con su ecuación diferencial correspondiente

$$F(t, x_0, \cdots, x_n) = a_0(t)x_0 + a_1(t)x_1 + a_2(t)x_2 + \cdots + a_n(t)x_n - g(t), \tag{1.12}$$

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = g(t), \tag{1.13}$$

Si $a_n(t) \neq 0$, la EDO anterior se puede escribir como

$$y^{(n)} + \tilde{a}_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + \tilde{a}_0(t)y = \tilde{g}(t) \tag{1.14}$$

donde

$$\tilde{a}_i(t) = \frac{a_i(t)}{a_n(t)} \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, n-1, \quad \text{y} \quad \tilde{g}(t) = \frac{g(t)}{a_n(t)} \ .$$

La ecuación (1.13) o (1.14) se llama Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal de orden n.

Una edo (de orden n) que no es lineal, esto es, que no se puede escribir en la forma (1.13) o (1.14), la llamaremos edo (de orden n) *no lineal*.

Algunos ejemplos de ecuaciones no lineales son

$$y' = ty^{1/2},$$

$$y'' + y^2 = 0.$$

1.2. Solución de una EDO. Comencemos analizando el caso particular de la edo de segundo orden lineal

$$y'' + k^2 y = 0, \tag{1.15}$$

donde k es una constante no nula.

Resolver (1.15) es encontrar funciones $y(t)$ definidas en un cierto intervalo tales que

$$y'' = -k^2 y.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Con la experiencia de cursos anteriores sabemos que un par de funciones que satisfacen esta propiedad son $\cos(kt)$ y $\sin(kt)$. Ambas funciones satisfacen entonces (1.15) para todo $t \in \mathbb{R}$ y por lo tanto son soluciones de la ecuación definida en $\mathbb{R}$.

Más generalmente consideremos la ecuación (1.8) y expliquemos lo que entendemos por una solución de esta ecuación.

Definición 1.2. *Una solución de (1.8) es una función $z : I \longmapsto \mathbb{R}$, de clase $C^n(I)$, tal que*

$$F(t, z(t), z'(t), \cdots, z^{(n)}(t)) = 0, \qquad \forall\ t \in I.$$

Notemos que para cada $t \in I$ el punto $(t, z(t), \cdots, z^{(n)}(t))$ necesariamente debe pertenecer al dominio Ω de definición de F. En esta definición I denota un intervalo de los reales. Este intervalo puede no ser el máximo intervalo donde se puede definir la solución. Encontrar este intervalo maximal puede llegar a ser un problema difícil en el caso no lineal.

Definición 1.3. *El problema con condición inicial para la ecuación (1.8) consiste en encontrar la solución de esta ecuación que satisface condiciones iniciales de la forma*

$$y(t_0) = c_1,\ y'(t_0) = c_2,\ \cdots, y^{n-1}(t_0) = c_n, \tag{1.16}$$

donde $t_0 \in I$ es un punto dado y $c_1 \cdots, c_n$ son constantes dadas.

Esta solución puede no ser única y veremos ejemplos más adelante.

2. EDO de primer orden

2.1. EDO de variables separables. La edo más simple de primer orden tiene la forma

$$y'(t) = g(t)$$

donde g es una función contínua. Por integración obtenemos inmediatamente que las soluciones de esta ecuación queda dada por la expresión

$$y(t) = C + \int g(t)dt,$$

donde C es una constante arbitraria.

Consideremos a continuación la edo

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$y' = \frac{g(t)}{h(y)}, \tag{2.1}$$

donde g y h son funciones continuas tales que $h(y) \neq 0$. Esta ecuación se conoce como de 'variables separables'. Suponiendo que $y = \phi(t)$ es una solución de esta edo, se tiene que

$$h(\phi(t))\phi'(t) = g(t),$$

y definiendo

$$H(s) = \int h(s)ds, \qquad G(t) = \int g(t)dt,$$

por integración se obtiene que la solución $\phi(t)$ debe satisfacer

$$H(\phi(t)) = G(t) + C.$$

Inversamente, si $z(t)$ es una función diferenciable que satisface

$$H(z(t)) = G(t) + C$$

en un intervalo I, entonces al derivar,

$$h(z(t))z'(t) = g(t),$$

se tiene que z es solución de (2.1) en cualquier intervalo donde $h(z(t)) \neq 0.$,

De este argumento queda claro que para resolver la ecuación (2.1) encontramos primero las primitivas H y G y formamos la expresión

$$H(y) = G(t) + C. \tag{2.2}$$

A continuación despejamos y como función de t. Si no es posible despejar, se acostumbra llamar a (2.2) la solución de implícita de (2.1). Damos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1. *Resuelva el problema*

$$y' = \frac{t}{y}.$$

Evaluamos H y G,

$$H(y) = \int ydy = \frac{y^2}{2} \quad y \quad G(t) = \int tdt = \frac{t^2}{2},$$

y formamos

$$H(y) = G(t) + C,$$

de donde

$$\frac{y^2}{2} = \frac{t^2}{2} + C.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Despejando

$$y(t) = \pm(t^2 + 2C)^{1/2}.$$

Queda propuesto encontrar soluciones de la ecuación, con sus intervalos maximal de definición, para distintos valores de la constante C.

Ejemplo 2.2. *Resolver la ecuación*

$$y' = \frac{y}{1+t},$$

No tiene la forma de variables separables, pero se la podemos dar escribiendola como

$$y' = \frac{\frac{1}{1+t}}{\frac{1}{y}}.$$

Evaluando H y G se obtiene

$$H(y) = \int \frac{1}{y} dy, \qquad G(t) = \int \frac{dt}{1+t},$$

de donde la solución se puede despejar como

$$y(t) = C(1+t),$$

con C una constante.

De acuerdo a la definición 1.3 el problema con condición inicial para la edo escalar de primer orden consiste en encontrar todas las soluciones del problema

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Es decir encontrar todas aquellas soluciones que satisfacen la condición inicial $y(t_0) = y_0$. El par (t_0, y_0) debe pertenece al dominio de definición de la función f.

Ejemplo 2.3. *Resolver el problema con condición inicial*

$$y' = -\frac{t^3}{y^3}, \qquad y(-1) = 5.$$

Evaluando H y G obtenemos

$$H(y) = \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} \qquad G(t) = -\int t^3 dy = -\frac{t^4}{4},$$

de donde las soluciones satisfacen

$$y^4 + t^4 = C.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Resolviendo para y.

$$y(t) = \pm(C - t^4)^{1/4},$$

y usando la condición inicial para calcular la constante C *obtenemos que* $C = 626$ *con lo que la solución pedida es*

$$y(t) = (626 - t^4)^{1/4}.$$

Propuesto. ¿Cuál es el intervalo maximal de definición de esta solución ?

En el siguiente ejemplo queremos ilustrar la falta de unicidad de las soluciones para un problema con condición inicial.

Ejemplo 2.4. *Resolver*

$$y' = ty^{1/2}, \qquad y(0) = 0. \tag{2.3}$$

Escribiendo la ecuación como

$$y' = \frac{t}{y^{-1/2}},$$

evaluando las primitivas H, G *y resolviendo para* y *en la expresión resultante, se obtiene*

$$y(t) = \left(\frac{t^2}{4} + C\right)^2.$$

Usando la condición inicial nos da que

$$y(t) = \frac{t^4}{16}$$

es una solución al problema con condición inicial.

Notamos, sin embargo, que el problema (2.3) tiene también la solución trivial $y(t) \equiv 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Así este problema tiene por lo menos 2 soluciones.*

Vamos a probar que tiene infinitas. En efecto, considere la familia de funciones que dependen de un parámetro $a > 0$,

$$y(t) = \begin{cases} 0 & |t| < a \\ \dfrac{(t^2 - a^2)^2}{16} & t \geq a \quad o \quad t \leq -a. \end{cases}$$

Esta función es de clase C^1 *en* $\mathbb{R}$ *y satisface*

$$y'(t) = \begin{cases} 0 & |t| < a \\ \dfrac{t(t^2 - a^2)}{4} = ty^{1/2} & |t| \geq a \end{cases}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

por lo que es solución del problema con condición inicial para cualquier valor $a > 0$ *dado.*

Se deja como ejercicio demostrar que este problema con condición inicial tiene una familia de soluciones que dependen de dos parametros.

2.2. EDO lineales, caso escalar. Vimos que la edo lineal de orden n más general tiene la forma

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t). \tag{2.4}$$

Si $g(t) \equiv 0$ diremos que esta ecuación es *Homogénea* y *No Homogénea* en caso contrario.

Vamos a suponer de ahora en adelante la siguiente hipótesis.

(H_1) *Las funciones coeficientes* $a_i(t)$, $i = 0, \cdots, n$, *y la función* $g(t)$ *están definidas en un intervalo común* I, *donde son continuas. Además* $a_n(t) \neq 0$, *para todo* $t \in I$.

Cuando $n = 1$, (3.1) se llama ecuación lineal de primer orden y tiene la forma

$$a_2(t)y' + a_1(t)y = g(t).$$

Dividiendo por $a_1(t)$ $(a_1(t) \neq 0)$, resulta

$$y' + P(t)y = f(t), \tag{2.5}$$

donde $P(t) = \frac{a_1(t)}{a_2(t)}$ y $f(t) = \frac{g(t)}{a_2(t)}$.

Estudiemos primero la ecuación homogenea

$$y' + P(t)y = 0. \tag{2.6}$$

Observando que

$$\frac{d}{dt} e^{\int P(t)dt} = P(t)e^{\int P(t)dt},$$

y multiplicando (2.6) por $e^{\int P(t)dt}$, se obtiene que

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\int P(t)dt} y\right] = 0.$$

Integrando y despejando se sigue que

$$y_h(t) = Ce^{-\int P(t)dt}, \tag{2.7}$$

donde y_h denota la solución de la ecuación (homogenea) (2.6). Notamos que esta expresión nos da todas las soluciones de esta ecuación por lo que la llamamos la solución general.

Consideremos a continuación la ecuación no homogénea

$$y' + P(t)y = f(t). \tag{2.8}$$

Con un procedimiento similar, esto es, multiplicando ambos lados de la ecuación por $e^{\int P(t)dt}$ e integrando, obtenemos que la solución general de la ecuación no homogenea queda dada por

$$y(t) = ce^{-\int P(t)dt} \quad +e^{-\int P(t)dt} \int f(t)e^{\int p(t)dt}. \tag{2.9}$$

La expresión

$$y_p(t) := e^{-\int P(t)dt} \int f(t)e^{\int P(t)dt}dt \tag{2.10}$$

se llama la solución particular de la ecuación (2.8). Diferenciaciando se obtiene directamente que y_p satisface la ecuación (2.8), es decir, satisface

$$y_p'(t) + P(t)y_p(t) = f(t).$$

Se tiene entonces que la solución general de la ecuación no homogenea se puede escribir como

$$y(t) \quad = y_h(t) + y_p(t).$$

A continuación se presentan algunos ejemplos de ecuaciones lineales de primer orden.

Ejemplo 2.5. *Resolver*

$$ty'(t) - 4y(t) = t^5e^t, \quad t \in (0, \infty),$$

Al escribirla en su forma normal queda

$$y'(t) - \frac{4y(t)}{t} = t^4e^t, \quad t \in (0, \infty).$$

Comparando con la ecuación (2.8), se observa que $P(t) = -\frac{4}{t}$ *y* $f(t) = t^4e^t$.

Después de algunos cálculos se obtiene que

$$\left(\frac{y}{t^4}\right)' = e^t,$$

e integrando

$$y(t) = ct^4 + t^4e^t,$$

que es la solución general de la ecuación.

Consideremos a continuación un ejemplo de un problema con condición inicial.

Ejemplo 2.6. *Resolver el problema con condición inicial*

$$t\frac{dy}{dt} + y = 2t, \qquad y(1) = 0, \qquad t \in (0, \infty).$$

En su forma normal

$$y' + \frac{y}{t} = 2, \qquad y(1) = 0, \qquad t \in (0, \infty).$$

Después de algunos cálculos, se obtiene que

$$(ty)' = 2t$$

e integrando

$$y(t) = \frac{c}{t} + t \qquad \textit{para} \quad t > 0.$$

Usando la condición inicial, se tiene que la solución pedida es

$$y(t) = t - \frac{1}{t}.$$

Consideremos a continuación un ejemplo de una la ecuación diferencial que es no lineal pero que se puede reducir a una lineal.

Ejemplo 2.7. *Resolver*

$$y' = \frac{1}{t + y^2}.$$

Escrita de esta manera, esta ecuación es no lineal. Sin embargo, si la escribimos como

$$\frac{dt}{dy} - t = y^2$$

se convierte en una ecuación lineal. Se han invertido eso si el rol de variable dependiente con el de variable independiente. Así en vez de pedir y como función de t buscamos t como función de y. Resolviendo, se obtiene

$$t = e^y c + e^y \int y^2 e^{-y} dy.$$

Como

$$\int y^2 e^{-y} dyx = -e^{-y} y^2 - 2e^{-y} y - 2e^{-y},$$

la solución queda dada entonces por

$$t(y) = ce^y - y^2 - 2y - 2.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

2.3. Algunas ecuaciones no lineales. Explicaremos a continuación algunos métodos para resolver ciertas ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden. La idea general es introducir un cambio de variables adecuado para reducir la ecuación a otra que sea conocida.

Comenzamos con un tipo de ecuaciones que tienen una cierta propiedad de homogeneidad, lo cual se va a usar para llevarlas a una ecuación conocida. Primero un ejemplo.

Ejemplo 2.8. *Consideremos la edo*

$$y' = -\frac{t^2 + y^2}{t^2 - ty},$$

que no es lineal y tiene la forma

$$y' = f(t, y).$$

Denotando por $M(t, y) := t^2 + y^2$ y $N(t, y) := t^2 - ty$ la ecuación se puede escribir como

$$y' = -\frac{M(t, y)}{N(t, y)}$$

Las funciones M y N tienen la siguiente propiedad

$$M(st, sy) = s^2 M(t, y), \quad N(st, sy) = s^2 N(t, y),$$

para cualquier $s \neq 0$. Esto sugiere hacer el cambio de variables $y = ut$, donde u se considera una nueva variable dependiente. Reemplazando $y' = u't + u$ en la ecuación diferencial y despejando se obtiene

$$u' = -\frac{1}{t}\frac{1 + u}{1 - u},$$

que escrita como

$$u' = -\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1-u}{1+u}},$$

resulta ser de variables separable. Utilizando la notación introducida para dicho tipo de ecuaciones, se tiene despues de algunos cálculos, que

$$H(u) = \int \left(\frac{1 - u}{1 + u}\right) du = \log((1 + u)^2) - u, \quad \text{y} \quad G(t) = -\log|t|.$$

Reemplazando $u = \dfrac{y}{t}$, se obtiene finalmente que las soluciones satisfacen

$$(t + y)^2 = C^{\frac{y}{t}}.$$

Más generalmente, consideremos la ecuación homogenea

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$y' = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)}, \tag{2.11}$$

donde M y N son funciones continuas y homogeneas de grado α , es decir satisfacen

$$M(st,sy) = s^{\alpha}M(t,y), \qquad N(st,sy) = s^{\alpha}N(t,y)$$

(note que puede ser necesario restringir los valores de s).

Haciendo el cambio de variables $y = ut$ en la ecuación (2.11), nos queda

$$u't + u = -\frac{M(t,tu)}{N(t,tu)} = -\frac{M(1,u)}{N(1,u)}$$

de donde

$$u' = -\frac{u + \frac{M(1,u)}{N(1,u)}}{t}.$$

De esta forma esta ecuación se puede escribir como una de variables separables de la forma

$$u' = -\frac{g(t)}{h(u)},$$

con

$$h(u) = \frac{1}{u + \frac{M(1,u)}{N(1,u)}} \quad \text{y} \quad g(t) = -\frac{1}{t}.$$

Asi la ecuación se ha reducido a una conocida.

A continuación vamos a considerar la **Ecuación de Bernoulli** que tiene la forma

$$y' + P(t)y = f(t)y^n$$

Notamos que para $n = 0$ y $n = 1$ la ecuación es una lineal de primer orden. Para resolver esta ecuación la escribimos en la forma

$$y^{-n}y' + P(t)y^{1-n} = f(t). \tag{2.12}$$

Haciendo el cambio de variables $u = y^{1-n}$, derivando esta expresión,

$$y^{-n}y' = \frac{u'}{1-n},$$

y reemplazando en la ecuación (2.12) resulta la ecuación lineal

$$u' + (1-n)P(t)u = (1-n)f(t),$$

que sabemos como resolver.

Otra ecuación no lineal de primer orden es la llamada **Ecuación de Ricatti** (1676-1754), que tiene la forma

$$y' = P(t) + Q(t)y + R(t)y^2. \tag{2.13}$$

En algunos casos esta ecuación se puede resolver por métodos elementales. En efecto, supongamos que se conoce una solución y_1 de la ecuación (2.13) y queremos encontrar todas las otras soluciones. Para esto definamos $z(t) = y(t) - y_1(t)$ y reemplacemos en (2.13), se obtiene

$$y' = z' + y_1' = P(t) + Q(t)(z + y_1) + R(t)(z^2 + 2zy_1 + y_1^2),$$

la cual usando que y_1 es solución, se simplifica a

$$z' - (Q(t) + 2y_1(t)R(t))z = R(t)z^2,$$

que resulta ser una ecuación de Bernoulli, con $n = 2$, que ya sabemos como resolver.

Ejemplo 2.9. *Consideremos la ecuación*

$$y' = 6 + 5y + y^2.$$

En este caso como $P = 6$, $Q = 5$, y $R = 1$, se tiene que una solución particular es $y_1(t) = -2$. Sea $y = -2 + z$, entonces z satisface la ecuación

$$z' - z = z^2,$$

que como dijimos recién es una ecuación de Bernoulli, con $n = 2$. Haciendo el cambio $u = z^{-1}$ se obtiene que u satisface

$$u' + u = -1$$

de donde

$$u(t) = ce^{-t} - 1.$$

Volviendo a las variables originales

$$z(t) = \frac{1}{ce^{-t} - 1}$$

y finalmente

$$y(t) = -2 + z(t) = -2 + \frac{1}{ce^{-t} - 1}.$$

Notamos que haciendo $c = 0$ obtenemos la solución $y(t) = -3$.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

2.4. Ejercicios Resueltos.

Ejercicio 2.1. *Considere la ecuación de Clairaut:*

$$y = ty' - \frac{1}{4}(y')^2.$$

Demuestre que $y(t) = Ct - \frac{1}{4}C^2$ es una solución uniparamétrica de esta ecuación. Encuentre cual de las siguientes funciones: $y(t) = t^2$, $y(t) = t^3$, $y(t) = e^t$, es una solución de la ecuación diferencial. Indique cual es la relación geométrica entre las soluciones.

Solución:

Se evalúa la función en la EDO y resulta:

$$ty' - \frac{1}{4}(y')^2 - y = tC - \frac{1}{4}(C)^2 - tC + \frac{1}{4}(C)^2 = 0.$$

Por lo tanto la función con parámetro C es una solución de la EDO.
Para encontrar cuales de las funciones son también solución, se evalúa en la EDO de manera similar:

$$t(t^2)' - \frac{1}{4}((t^2)')^2 - (t^2) = 2t^2 - t^2 - t^2 = 0.$$

Por lo tanto $y(t) = t^2$ es solución.

$$t(t^3)' - \frac{1}{4}((t^3)')^2 - (t^3) = 3t^3 - \frac{9}{4}t^3 - t^3 = \frac{1}{4}t^3.$$

Por lo tanto $y(t) = t^3$ no es solución de la EDO.

$$t(e^t)' - \frac{1}{4}((e^t)')^2 - (e^t) = 2e^t - \frac{1}{4}e^{2t} - e^t \neq 0.$$

Por lo tanto $y(t) = e^t$ no es solución de la EDO.

Finalmente, la relación geométrica de las soluciones de esta EDO es que las rectas son tangentes a la parábola t^2. Esto se puede obtener dibujando varias soluciones, y luego calculando la ecuación de la recta tangente a $y(t) = t^2$ en $t = \frac{C}{2}$. Sea $f(t) = at + b$ la recta tangente en $t = \frac{C}{2}$, entonces se debe cumplir que:

$$f\left(\frac{C}{2}\right) = y\left(\frac{C}{2}\right), \quad \text{y} \quad f'\left(\frac{C}{2}\right) = y'\left(\frac{C}{2}\right).$$

de donde se obtiene que $a = -\frac{1}{4}C^2$ y $b = C$.

En la Figura 1 se pueden ver los comandos de Maple para generar las soluciones y sus gráficos.

```
> ode := y(t) = t·diff(y(t), t) − 1/4·(diff(y(t), t))^2;
```

$$ode := y(t) = t\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2$$

```
> dsolve(ode, y(t));
```

$$y(t) = t^2,\ y(t) = t\ \_C1 - \frac{1}{4}\ \_C1^2$$

```
> f := (t, c) → t·c − 1/4·c^2;
```

$$f := (t, c) \to t\,c - \frac{1}{4}c^2$$

```
> plot({t^2, f(t, 1), f(t,−1), f(t,−4), f(t, 4), f(t, 8), f(t,−8)}, t=−10..10, y=−20..40)
```

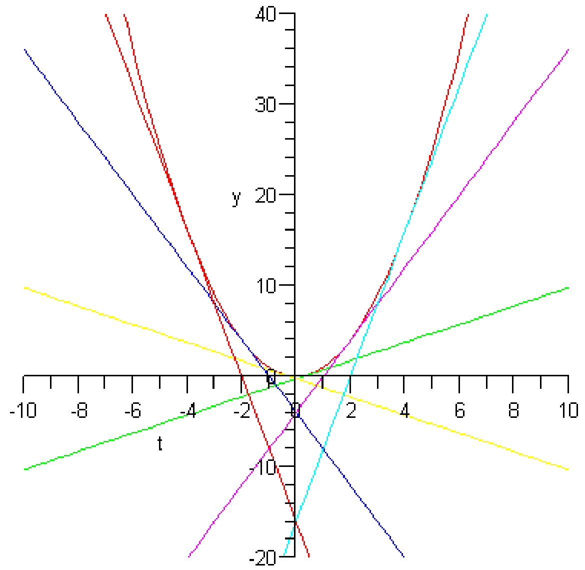

FIGURA 1. Código Maple Ejercicio 2.1

Ejercicio 2.2. *Considere la EDO:*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

donde $p, q : I \to R$ son dos funciones continuas que se pide determinar bajo la condición de que

$$y_1(t) = \sin(t^2) \quad \text{e} \quad y_2(t) = \cos(t^2).$$

formen una base de soluciones de esta ecuación. Determine claramente los intervalos reales I donde este problema admite solución.

<u>Solución:</u>

Para calcular $p(t)$ y $q(t)$ se evalúa $y_1(t)$ y $y_2(t)$ en la EDO, obteniéndose el siguiente sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas:

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$2tp(t)\cos(t^2) + q(t)\sin(t^2) = 4t^2\sin(t^2) - 2\cos(t^2).$$

$$-2tp(t)\sin(t^2) + q(t)\cos(t^2) = 4t^2\cos(t^2) + 2\sin(t^2).$$

Resolviendo el sistema se obtiene la respuesta: $p(t) = -\frac{1}{t}$, $q(t) = 4t^2$. Los intervalos donde la EDO admite solución son $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

Ejercicio 2.3. *La ecuación diferencial:*

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b\ln(P)).$$

se utiliza en el pronóstico de crecimiento de poblaciones. En esta ecuación $a > 0$ y b son constantes.
(i) Encuentre la solución de esta ecuación, si $P(0) = P_0 > 0$.
(ii) Describa el comportamiento de $P(t)$ cuando $t \to \infty$.

Solución:

(i) La EDO es del tipo variables separables:

$$\frac{dP}{dt} = P' = \frac{1}{\frac{1}{P(a - b\ln(P))}} = \frac{g(t)}{h(P)}.$$

Integrando se tiene que:

$$G(t) = \int_0^t dt = t.$$

$$H(P(t)) = \int_{P_0}^{P(t)} \frac{1}{P(a - b\ln(P))} dP = -\frac{1}{b}\ln\left(\frac{a - b\ln(P(t))}{a - b\ln(P_0)}\right).$$

$$H(P(t)) = G(t).$$

Finalmente luego de despejar, la solución de la EDO es:

$$P(t) = e^{\frac{a}{b} - \frac{e^{-bt}}{b}(a - b\ln(P_0))}.$$

(ii) Por enunciado $P_0 > 0$, $a > 0$. Entonces hay dos casos por analizar: $b < 0$ y $b > 0$.

En el caso que $b > 0$, se cumple que:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\frac{a}{b} - \frac{e^{-bt}}{b}(a - b\ln(P_0))} = e^{\frac{a}{b}}.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

En el caso que $b < 0$, se cumple que:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\frac{a}{b} - \frac{e^{-bt}}{b}(a - b\ln(P_0))} = e^{\frac{a}{b} - \frac{(a - b\ln(P_0))}{b}\lim_{t\to\infty} e^{-bt}}.$$

y entonces hay tres casos: $(a-b\ln(P_0)) = 0$, $(a-b\ln(P_0)) > 0$ y $(a-b\ln(P_0)) < 0$.

Si se cumple que $(a - b\ln(P_0)) = 0$:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = e^{\frac{a}{b}}.$$

Si se cumple que $(a - b\ln(P_0)) > 0$:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \infty.$$

Si se cumple que $(a - b\ln(P_0)) < 0$:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = 0.$$

Ejercicio 2.4. *Considere el problema con condición inicial:*

$$(1 + x^2)y' + 2xy = f(x), \quad y(0) = 0.$$

donde:

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{para } x \in [0, 1) \\ -x & \textit{para } x \geq 1 \end{cases} \tag{2.14}$$

Encuentre una solución continua, (no de clase C^1) de este problema. Evalúe $y'(1_+)$, $y'(1_-)$ y demuestre que $y'(1_+) - y'(1_-) = -1$.

<u>Solución:</u>

Si $x \in [0, 1)$:

$$y_1' + \frac{2x}{1 + x^2}y_1 = \frac{x}{1 + x^2}.$$

la cual es una EDO lineal. El factor integrante es $1 + x^2$. Al multiplicar por el factor integrante resulta:

$$\frac{d((1 + x^2)y_1)}{dx} = x,$$

$$(1 + x^2)y_1 = \frac{x^2}{2} + c_1,$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{c_1}{1+x^2}.$$

Esta solución es valida en $x \in [0,1)$, por lo que se puede aplicar la condición inicial $y_1(0) = 0$, resultando $c_1 = 0$, y por lo tanto:

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2(1+x^2)}.$$

Si $x \in [1, \infty)$:

$$y_2' + \frac{2x}{1+x^2} y_2 = \frac{-x}{1+x^2}.$$

La cual es una EDO lineal. El factor integrante es $1 + x^2$. Al multiplicar por el factor integrante resulta:

$$\frac{d((1+x^2)y_2)}{dx} = -x,$$

$$(1+x^2)y_2 = \frac{-x^2}{2} + c_2,$$

$$y_2(x) = \frac{-x^2}{2(1+x^2)} + \frac{c_2}{1+x^2}.$$

Esta solución es valida en $x \in [1, \infty)$. c_2 se obtiene aplicando la condición de continuidad de las soluciones: $y_1(1) = y_2(1)$, resultando $c_2 = 1$, y por lo tanto:

$$y_2(x) = \frac{-x^2+2}{2(1+x^2)}.$$

En resúmen, la solución definida por tramos es:

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2(1+x^2)} & \text{para } x \in [0,1) \\ \dfrac{-x^2+2}{2(1+x^2)} & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$$

De la EDO se obtiene que:

$$y'(x) = \frac{f(x) - 2xy(x)}{1+x^2}.$$

Evaluando en $1+$ y en $1-$ se tiene:

$$y'(1+) = \frac{-1 - 2y(1+)}{2} = \frac{-1 - 2\frac{1}{4}}{2} = -\frac{3}{4}.$$

$$y'(1-) = \frac{1 - 2y(1-)}{2} = \frac{-1 - 2\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4}.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$y'(1+) - y'(1-) = -1.$$

En la Figura 2 se muestra el código en Maple para obtener la solución y su gráfico. Es claro a partir de la figura que la función $y(x)$ no es diferenciable en $x = 1$.

```
> ode := (1 + x^2)*(diff(y(x), x)) + 2*x*y(x) = piecewise(0 ≤ x and x < 1, x, 1 ≤ x, -x);
```

$$ode := \left(1 + x^2\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 2\,x\,y(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \textbf{ and } x < 1 \\ -x & 1 \le x \end{cases}$$

```
> ci := y(0) = 0;
```

$$ci := y(0) = 0$$

```
> sol := dsolve({ode, ci}, y(x));
```

$$sol := y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x^2} & x < 1 \\ -\frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} & 1 \le x \end{cases}$$

```
> with(DEtools) : DEplot( ode, [y(x)], x = 0..7, y =-0.6..0.5, [[0, 0]], arrows = medium, stepsize = 0.05);
```

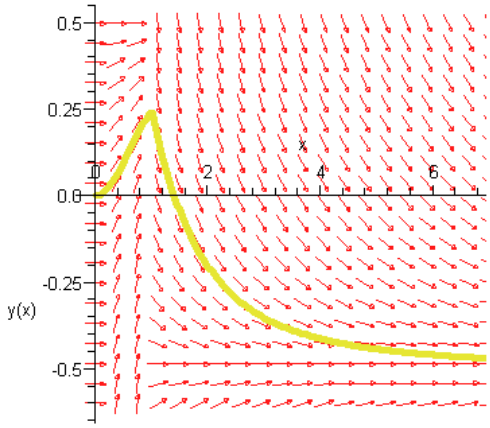

FIGURA 2. Código Maple Ejercicio 2.4

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Ejercicio 2.5. *Considere la ecuación diferencial lineal de primer orden:*

$$y' + a(t)y = b(t)u(t)$$

(i) Se pide encontrar las funciones $a(t)$ y $b(t)$, sabiendo que si $u(t) = 0$ la solución es $y(t) = e^{-t}$ y si $u(t) = 1$ la solución es $y(t) = -e^{-t} + 1$.

(ii) A partir de (i), determine la solución $y(t)$ de la ecuación cuando

$$u(t) = \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 0$$

(iii) Resuelva la ecuación diferencial ordinaria cuando:

$$a(t) = \tan t, \quad b(t) = \cos^2 t, \quad y(0) = -1.$$

Solución:

(i) El primer dato: $u(t) = 0, y(t) = e^{-t}, y'(t) = -e^{-t}$. Entonces:

$$-e^{-t} + a(t)e^{-t} = (a(t) - 1)e^{-t} = 0.$$

Luego $a(t) = 1$.

El segundo dato: $u(t) = 1, y(t) = -e^{-t} + 1, y'(t) = -e^{-t}$. Entonces:

$$-e^{-t} + 1 - e^{-t} = 1 = b(t).$$

Finalmente los parámetros de la EDO resultaron ser constantes. Ahora se resuelve la parte (ii):

$$y' + y = \sin(t).$$

La EDO es del tipo Lineal de primer orden. El método dice que se debe obtener un factor integrante, el cual es e^t. Al multiplicar este factor integrante en la EDO, esta queda:

$$\frac{d(ye^t)}{dt} = e^t \sin(t).$$

La cual es una EDO de variables separables de la forma $y' = f(t)$, que se resuelve integrando directamente.

$$\int d(ye^t) = y(t)e^t = \int e^t \sin(t)dt + C = -\frac{1}{2}e^t \cos(t) + \frac{1}{2}e^t \sin(t) + C,$$

$$y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t)).$$

De la condición inicial $y(0) = 0$ se obtiene que $C = \frac{1}{2}$, con lo que la solución al problema con condición inicial es:

$$y(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + \sin(t) - \cos(t)).$$

Este mismo resultado puede ser obtenido ocupando el programa Maple, como se muestra en la figura (3). El comando plot por defecto ocupa 50 puntos para realizar el gráfico, sin embargo no son suficientes en este ejemplo, y se modifica a 500 puntos.

> $ode1 := diff(y(t), t) + y(t) = \sin(t);$

$$ode1 := \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = \sin(t)$$

> $ci1 := y(0) = 0;$

$$ci1 := y(0) = 0$$

> $dsolve(\{ode1, ci1\}, y(t));$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}e^{-t}$$

> $plot\left(-\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}e^{-t}, t=-10..30, y=-3..5, numpoints=500\right)$

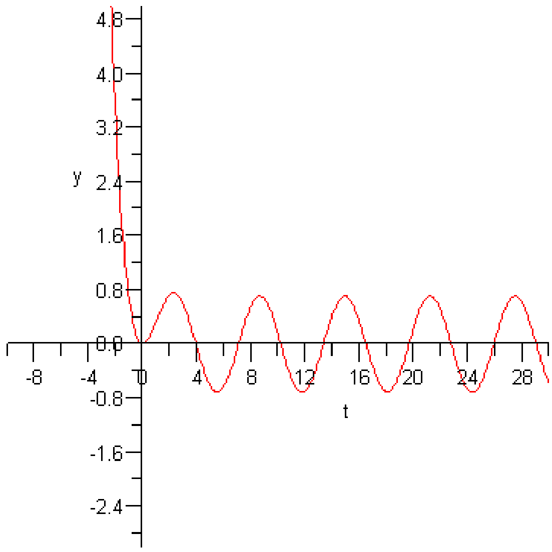

FIGURA 3. Código Maple Ejercicio 2.5 (ii)

En la figura (4) se muestra el código Maple para generar las pendientes de las curvas integrales de la ecuación. Para marcar la solución al problema con condición inicial, luego de fijar los ejes se anota [[0, 0]], en la que la primera componente significa $t = 0$ y la segunda $y(0) = 0$.

```
> with(DEtools) : DEplot( ode1, [y(t)], t=-10..30, y=-3..5, [[0, 0]], arrows = medium, stepsize = 0.5);
```

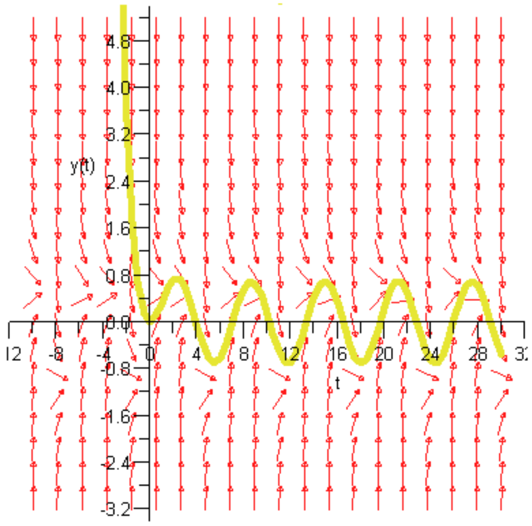

FIGURA 4. Código Maple Ejercicio 2.5 (ii)

(iii) En la tercera parte de la pregunta, la EDO es del tipo lineal, y el factor integrante $e^{\int \tan(t)} = e^{-\ln(\cos(t))} = \sec(t)$. Al multiplicar la EDO por el factor integrante resulta:

$$\frac{d(y(t)\sec(t))}{dt} = \cos(t),$$

$$\int d(y\sec(t)) = \int \cos(t)dt + C,$$

$$y(x) = C\cos(t) + \sin(t)\cos(t).$$

La condición inicial es $y(0) = -1$, entonces $C = -1$ con lo que la solución al problema con CI es:

$$y(t) = \sin(t)\cos(t) - \cos(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) - \cos(t).$$

En la figura (5) se muestra el código Maple para generar las pendientes de las curvas integrales de la ecuación y se marca la solución al problema de condición inicial (se anota $[[0, -1]]$, o sea $y(0) = -1$).

```
> ode3 := diff( y(t), t ) + tan(t)·y(t) = cos(t)^2
```

$$ode3 := \frac{d}{dt}\,y(t) + \tan(t)\,y(t) = \cos(t)^2$$

```
>
> ci3 := y(0) =-1;
```

$$ci3 := y(0) = -1$$

```
> dsolve({ode3, ci3}, y(t));
```

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin(2\,t) - \cos(t)$$

```
> with(DEtools) : DEplot( ode3, [y(t)], t = 0 ..20, y =-2 ..2, [[0,-1]], arrows = medium, stepsize = 0.05);
```

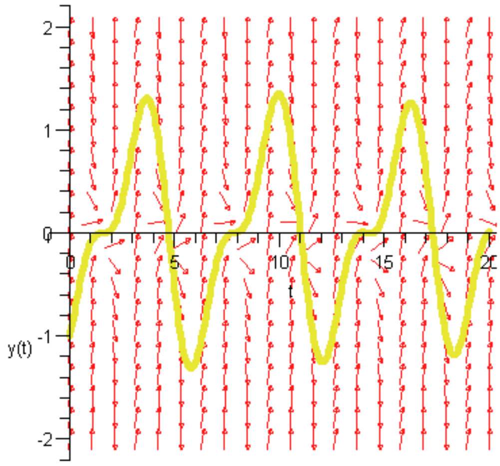

FIGURA 5. Código Maple Ejercicio 2.5 (iii)

Ejercicio 2.6. *Considere la ecuación diferencial:*

$$y' + ay = bu(t), \quad y(0) = 0,$$

donde $a > 0$, $b > 0$ *son números reales dados. La función* $u(t)$ *está definida por:*

$$u(t) = \begin{cases} 3 & si \quad 0 \le t \le \tau \\ 2 & si \quad \tau < t \le 2\tau \\ 1 & si \quad 2\tau < t \le 3\tau \\ f(t) & si \quad 3\tau < t \end{cases}$$

donde τ *es un número positivo dado. Encuentre y grafique una función* $y(t)$ *que satisface la ecuación diferencial en los intervalos* $[0,\tau]$, $(\tau, 2\tau]$, $(2\tau, 3\tau]$, $(3\tau, \infty)$ *y que es continua en* $[0, \infty)$ *para los siguientes casos:*
(i) $f(t) = 0$, *(ii)* $f(t) = \cos(t)$.

Solución:

En el intervalo $[0, \tau]$ se cumple:

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$y' + ay = 3b \quad \Rightarrow y(t) = c_1 e^{-at} + \frac{3b}{a}.$$

Al aplicar la condición inicial $y(0) = 0$ resulta $c_1 = -\frac{3b}{a}$ y entonces:

$$y(t) = \frac{3b}{a}(1 - e^{-at}), \quad t \in [0, \tau].$$

En el intervalo $(\tau, 2\tau]$ se cumple:

$$y' + ay = 2b \quad \Rightarrow y(t) = c_2 e^{-at} + \frac{2b}{a}.$$

Al aplicar la condición de continuidad en τ, $y(\tau) = \frac{3b}{a}(1 - e^{-a\tau})$ resulta $c_2 = \frac{b}{a}(e^{a\tau} - 3)$ y entonces:

$$y(t) = \frac{b}{a}(e^{a\tau} - 3)e^{-at} + \frac{2b}{a}, \quad t \in (\tau, 2\tau].$$

En el intervalo $(2\tau, 3\tau]$ se cumple:

$$y' + ay = b \quad \Rightarrow y(t) = c_3 e^{-at} + \frac{b}{a}.$$

Al aplicar la condición de continuidad en 2τ, $y(2\tau) = \frac{b}{a}(e^{a\tau} - 3)e^{-a\tau} + \frac{2b}{a}$ resulta $c_3 = \frac{b}{a}(e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3)$ y entonces:

$$y(t) = \frac{b}{a}(e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3)e^{-at} + \frac{b}{a}, \quad t \in (2\tau, 3\tau].$$

En el intervalo $(3\tau, \infty)$ se cumple:

$$y' + ay = f(t).$$

(i) Analizando el primer caso $f(t) = 0$

$$y' + ay = 0 \quad \Rightarrow y(t) = c_{41} e^{-at}.$$

Al aplicar la condición de continuidad en 3τ, $y(3\tau) = \frac{b}{a}(e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3)e^{-3a\tau} + \frac{b}{a}$ resulta $c_{41} = \frac{b}{a}(e^{3a\tau} + e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3)$ y entonces:

$$y(t) = \frac{b}{a}(e^{3a\tau} + e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3)e^{-at}, \quad t \in (3\tau, \infty).$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

(ii) Analizando el segundo caso $f(t) = \cos(t)$

$$y' + ay = \cos(t) \quad \Rightarrow y(t) = c_{42}e^{-at} + \frac{ab}{1+a^2}\cos(t) + \frac{b}{1+a^2}\sin(t).$$

Tomando $\text{sen}(\phi) = \frac{a}{1+a^2}$ y $\cos(\phi) = \frac{1}{1+a^2}$, la solución de la EDO en este intervalo se escribe:

$$y(t) = c_{42}e^{-at} + b\,\text{sen}(t+\phi).$$

Al aplicar la condición de continuidad en 3τ, $y(3\tau) = \frac{b}{a}(e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3))e^{-3a\tau} + \frac{b}{a}$ resulta $c_{42} = \frac{b}{a}(e^{3a\tau} + e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3) - e^{3a\tau}b\,\text{sen}(3\tau+\phi)$ y entonces:

$$y(t) = \left(\frac{b}{a}(e^{3a\tau} + e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3) - be^{3a\tau}\,\text{sen}(3\tau+\phi)\right)e^{-at} + \text{sen}(t+\phi), \quad t \in (3\tau, \infty).$$

En las siguientes figuras se muestran gráficos de la función $y(t)$ para cada caso de $f(t)$, tomando los valores $a = 1$, $b = 1$, $\tau = 10$.

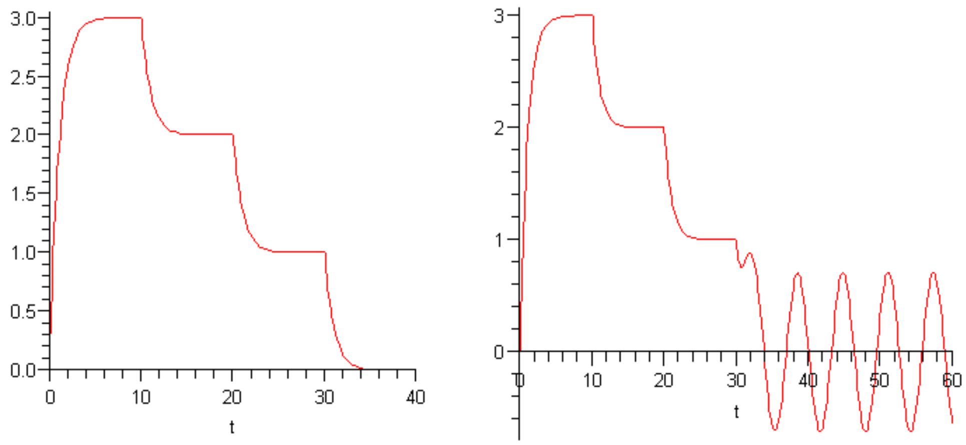

Figura 6. Gráficos Ejercicio 2.6

Ejercicio 2.7. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

$$y' = \frac{y^2 + \beta ty}{t^2 + \alpha ty}.$$

Solución:

La EDO es del tipo Homogénea y entonces se aplica el cambio de variable: $y = tu$, $y' = u + tu'$. Al reemplazar en la ecuación resulta:

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$u + tu' = \frac{u^2 + \beta u}{1 + \alpha u}.$$

Despejando u' queda:

$$u' = \frac{u\left((1-\alpha)u + (\beta - 1)\right)}{t(1+\alpha u)}.$$

La cual es una ecuación del tipo Variables Separables. Entonces se cumple que:

$$\int \frac{1+\alpha u}{u((1-\alpha)u + (\beta-1))} du = \int \frac{1}{t} dt + c.$$

ocupando fracciones parciales, resulta:

$$\int \frac{A}{u} du + \int \frac{B}{(1-\alpha)u + (\beta - 1)} du = \int \frac{1}{t} dt + c.$$

donde $A = \frac{1}{\beta - 1}$ y $B = \frac{1-\alpha\beta}{1-\beta}$. Finalmente se obtiene la solución implícita de la EDO:

$$u^A((1-\alpha)u + (\beta - 1))^{\frac{B}{1-\alpha}} = Ct.$$

Regresando a la variable original, sustituyendo $u = \frac{y}{t}$ queda:

$$\left(\frac{y}{t}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \left((1-\alpha)\left(\frac{y}{t}\right) + (\beta - 1)\right)^{\frac{1-\alpha\beta}{(1-\beta)(1-\alpha)}} = Ct.$$

Ejercicio 2.8. *Mediante sustituciones adecuadas resuelva la EDO no lineal:*

$$y' - 4y \ln y + 2ty(\ln y)^3 = 0.$$

y encuentre la solución que satisface $y(0) = e^{-\frac{1}{4}}$. *Demuestre que el dominio de definición de esta solución incluye el intervalo* $[0, \infty)$. *Sugerencia. Transforme primero la ecuación en otra no lineal pero conocida.*

Solución:

Se aplica el cambio de variable $u = \ln(y)$, $u' = y^{-1}y'$ y resulta la EDO del tipo Bernoulli:

$$u' - 4u + 2tu^3 = 0.$$

$$u^{-3}u' - 4u^{-2} = -2t.$$

Con el cambio de variable $u^{-2} = w$, $-2u^{-3}u' = w'$ resulta la EDO lineal:

$$w' + 8w = 4t.$$

cuya solución es

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$w(t) = ce^{-8t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{16}.$$

Regresando a la variable inicial:

$$u(t) = \frac{1}{\pm\sqrt{ce^{-8t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{16}}}.$$

$$y(t) = e^{u(t)} = e^{\frac{1}{\pm\sqrt{ce^{-8t}+\frac{1}{2}t-\frac{1}{16}}}} = e^{\frac{4}{\pm\sqrt{c'e^{-8t}+8t-1}}}.$$

La condición inicial $y(0) = e^{-\frac{1}{4}}$, impone que de ambas soluciones posibles ($\pm$ la raíz cuadrada), se deba elegir aquella con raíz de signo negativo $-$. La constante toma el valor $c' = 257$ y finalmente la solución al problema con condición inicial es:

$$y(t) = e^{-\frac{4}{\sqrt{257e^{-8t} + 8t - 1}}}.$$

Ejercicio 2.9. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

$$y' = \frac{y^2}{(m+n)^2} - \frac{4mn}{(m+n)^2}y - (m-n)^2.$$

Donde $m > 0$ *y* $n > 0$ *son constantes positivas.*

Solución:

La ecuación diferencial es del tipo Riccati. El método dice que para resolver este tipo de ecuación se debe encontrar una solución particular de la EDO. Se intenta encontrar primero una solución del tipo constante $y_1 = C$, $y_1' = 0$, y luego de hacer algunas simplificaciones resulta la siguiente ecuación algebraica de segundo grado:

$$C^2 - 4mnC - (m^2 - n^2)^2 = 0.$$

cuyas soluciones son: $(m+n)^2$ y $-(m-n)^2$.

Tomando por ejemplo como solución a $y_1 = (m+n)^2$, el siguiente paso es realizar el cambio de variable:

$$z = y - y_1 = y - (m+n)^2, \quad z' = y'.$$

Al aplicar este cambio de variable resulta la siguiente EDO del tipo Bernoulli:

$$z' + \left(\frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2}\right) z = \frac{1}{(m+n)^2}z^2.$$

$$\frac{z'}{z^2} + \left(\frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2}\right)\frac{1}{z} = \frac{1}{(m+n)^2}.$$

Para resolver la EDO de tipo Bernoulli se realiza el cambio de variable: $u = \frac{1}{z}$, $u' = -\frac{1}{z^2}z'$, quedando la siguiente EDO de tipo Lineal.

$$u' + \frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2}u = \frac{-1}{(m+n)^2}.$$

Para resolver la EDO lineal, esta se debe multiplicar por el factor integrante:

$$e^{\int\left(\frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2}\right)dt} = e^{\left(\frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2}\right)t}.$$

$$\frac{d\left(ue^{\left(\frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2}\right)t}\right)}{dt} = \frac{-1}{(m+n)^2}e^{\left(\frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2}\right)t}.$$

entonces

$$u(t) = e^{\left(\frac{-2(n^2+m^2)}{(m+n)^2}\right)t}\left(C - \frac{1}{(m+n)^2}\int e^{\left(\frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2}\right)t}\right)dt = Ce^{\left(\frac{-2(n^2+m^2)}{(m+n)^2}\right)t} - \frac{1}{2(n^2+m^2)}.$$

Regresando a la variable $z = \frac{1}{u}$

$$z(t) = \frac{1}{Ce^{\left(\frac{-2(n^2+m^2)}{(m+n)^2}\right)t} - \dfrac{1}{2(n^2+m^2)}}.$$

Regresando a la variable $y(t) = z(t) + y_1(t)$, se obtiene la solución del problema:

$$y(t) = \frac{1}{Ce^{\left(\frac{-2(n^2+m^2)}{(m+n)^2}\right)t} - \dfrac{1}{2(n^2+m^2)}} + (m+n)^2.$$

Ejercicio 2.10. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

$$y' = \tan(y)\cdot\operatorname{sen}(y) + 3\tan(y) + 2\sec(y).$$

Sugerencia: Use un cambio de variable adecuado para convertir la ecuación en Ricatti a coeficientes constantes.

Solución:

El cambio de variable adecuado es: $z = \operatorname{sen}(y), z' = \cos(y)y'$. Al aplicar el CV en la EDO, resulta:

$$\cos(y)y' = (\operatorname{sen}(y))^2 + 3\operatorname{sen}(y) + 2.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$z' = z^2 + 3z + 2.$$

La cual es una EDO del tipo Riccati. Para resolverla se debe encontrar una solución particular de la EDO. Se tantea $z_1 = C, z_1' = 0$. Se debe entonces resolver la ecuación de segundo grado:

$$C^2 + 3C + 2 = (C+2)(C+1) = 0.$$

Sea $y_1 = -2$. El cambio de variable para reducir EDO del tipo Ricatti a Bernoulli es $w = z - z_1 = z + 2, w' = z'$. Al aplicarlo resulta la EDO:

$$w' + w = w^2.$$

$$w^{-2}w' + w^{-1} = 1.$$

Se aplica el cambio de variable: $v = w^{-1}, v' = -w^{-2}w'$, con el cual resulta la EDO del tipo lineal:

$$v' - v = -1.$$

cuya solución es

$$v(t) = ce^t + 1.$$

Volviendo a la variable inicial:

$$w(t) = \frac{1}{ce^t + 1}.$$

$$z(t) = \frac{1}{ce^t + 1} - 2.$$

$$y(t) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{ce^t + 1} - 2\right).$$

Ejercicio 2.11. *Considere el siguiente problema de Control Óptimo:*

$$min \quad \frac{1}{2}x^2(T) + \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{5}{4}x^2 + u^2\right) dt.$$

sujeto a :

$$x' = x + u, \quad x(0) = x_0.$$

Este problema consiste en encontrar la función $u(t)$ que minimiza el funcional objetivo. Este problema se puede resolver entre otros métodos, mediante Programación Dinámica. En este caso se debe resolver la ecuación en derivadas parciales de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$v_t + \max_{a \in \Re} \left((x+a)\nabla_x v - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}x^2 + a^2\right)\right) = 0.$$

Con condición de borde:

$$v(x,T) = -\frac{1}{2}x^2.$$

(i) (Opcional) Pruebe que la EDP admite soluciones de la forma $K(t)x^2$, donde $K(t)$ es solución de la ecuación de Ricatti: $K' + 2K^2 + 2K - \frac{5}{8} = 0$, con condición final $K(T) = -\frac{1}{2}$.
(ii) Usando (i), resuelva la ecuación de Ricatti para $K(t)$ y luego, sabiendo que el control óptimo está dado por $u(t) = 2x(t)K(t)$, encuentre una expresión para la trayectoria óptima $x(t)$.

Solución:

(i) Sea $v(x,t) = K(t)x^2$. Entonces las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{dK(t)}{dt}x^2.$$

$$\nabla_x v = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 2K(t)x.$$

Antes de reemplazar las derivadas parciales, notar que el valor máximo de:

$$\left((x+a)\nabla_x v - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}x^2 + a^2\right)\right).$$

se alcanza cuando $a = \nabla_x v$. Reemplazando esto y las derivadas parciales en la EDP resulta:

$$x^2\left(\frac{dK(t)}{dt} + 2K(t)^2 + 2K(t) - \frac{5}{8}\right) = 0.$$

La condición de borde entrega la condición final para la ecuación de Riccati:

$$v(x,T) = K(T)x^2 = -\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow K(T) = -\frac{1}{2}.$$

(ii) La EDO de Ricatti es: $\frac{dK(t)}{dt} = -2K(t)^2 - 2K(t) + \frac{5}{8}$.

El procedimiento para resolver este tipo de EDO dice que hay que encontrar una solución particular de esta EDO. Debido a que los coeficientes son constantes, se tantea una solución particular de la forma $K_p(t) = C, K_p(t)' = 0$. Entonces para encontrar C se debe resolver la ecuación de segundo grado:

$$2C^2 + 2C - \frac{5}{8} = 0.$$

cuyas raíces son: $C_1 = -\frac{5}{4}$, y $C_2 = \frac{1}{4}$.
Escogiendo $K_p(t) = \frac{1}{4}$, se realiza el cambio de variable:

$$z(t) = K(t) - K_p(t) = K(t) - \frac{1}{4}, \Rightarrow z(t)' = K(t)'.$$

La EDO queda ahora del tipo Bernoulli:

$$z' + 3z = -2z^2.$$

$$z^{-2}z' + 3z^{-1} = -2.$$

Aplicando el cambio de variable $w(t) = z^{-1}, w(t)' = -z^{-2}z'$, resulta la siguiente EDO lineal:

$$w' - 3w = 2.$$

La solución de la EDO lineal es:

$$w(t) = Ce^{3t} - \frac{2}{3}.$$

La solución de la EDO de Bernoulli es:

$$z(t) = \frac{1}{Ce^{3t} - \frac{2}{3}}.$$

La solución de la EDO de Ricatti es:

$$K(t) = \frac{1}{Ce^{3t} - \frac{2}{3}} + \frac{1}{4}.$$

Se aplica ahora la condición final $K(T) = -\frac{1}{2}$ y se obtiene $C = -\frac{2}{3}e^{-3T}$. Finalmente la solución del problema de Ricatti con condición terminal es:

$$K(t) = \frac{1}{-\frac{2}{3}(e^{3(t-T)} + 1)} + \frac{1}{4}.$$

Se sabe que $u(t) = 2x(t)K(t)$. Al reemplazar esto en la EDO para $x(t)$ resulta la EDO de primer orden lineal homogenea (variables separables) :

$$x(t)' - x(t) = u(t) = 2x(t)K(t).$$

$$x(t)' + (-1 - 2K(t))x(t) = 0.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

cuya solución es:

$$x(t) = x(0)e^{\int_0^t (1+2K(t))dt}.$$

Ejercicio 2.12. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Solución:

Se aplica el cambio de variable $y = xu$, $y' = u + xu'$ y queda

$$x(u + xu') - xu = \sqrt{x^2 + x^2u^2}.$$

Al simplificar resulta:

$$x^2u' = x\sqrt{1 + u^2}.$$

La cual es una EDO del tipo Variables Separables.

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Entonces se tiene que:

$$\sinh^{-1}(u(x)) = \ln(x) + C.$$

Regresando a la variable inicial, reemplazando $u = \frac{y}{x}$, se obtiene la solución del problema:

$$y(x) = x\sinh(\ln(x) + C).$$

Ejercicio 2.13. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:*

(i) $y' = \dfrac{y}{x(\ln(y) - ln(x) + 1)}, \quad y(1) = e.$

(ii) $y' = 1 + e^{y-x+5}.$

(iii) $y'' = \dfrac{\cos(t)}{y'e^{y'^2} + 1}.$

Además en este caso a partir de la expresión encontrada para y' demuestre que se puede resolver para y' en forma única.

Solución:

(i) La ecuación se puede escribir como:

$$y' = \frac{y}{x}\frac{1}{\ln(\frac{y}{x})+1}.$$

Aplicando el cambio de variable: $y = ux$, $y' = u'x + u$ resulta:

$$u'x + u = \frac{u}{\ln(u)+1},$$

que es una EDO del tipo Variables Separables.

$$u' = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{u} - \frac{1}{u\ln(u)}} = \frac{g(x)}{h(u)}$$

Se integra y se obtiene:

$$G(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln(x)$$

$$H(u) = -\int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u\ln(u)}\right) du = -\ln(u) - \ln(\ln(u)) = \ln\left(\frac{1}{u\ln(u)}\right)$$

Por lo tanto:

$$\ln\left(\frac{1}{u\ln(u)}\right) = \ln(x) + C$$

$$\frac{1}{u\ln(u)} = cx$$

Se regresa a la variable inicial y queda:

$$y(x)\ln\left(\frac{y(x)}{x}\right)c = 1$$

La condición inicial $y(1) = e$ permite obtener $c = e^{-1}$, por lo que la solución del problema con condición inicial es:

$$y(x)\ln\left(\frac{y(x)}{x}\right) = e$$

(ii) Para la segunda pregunta, se realiza el cambio de variable: $u = y - x + 5$, $u' = y' - 1$.

$$u' = e^u$$

La cual es de variables separables.

$$e^{-u} = -x + c, \quad \Rightarrow \quad u = -\ln(-x + c).$$

Y regresando a la variable inicial:

$$y(x) = x - 5 - \ln(c - x).$$

(iii) La ecuación es de variables separables. Luego de integrar resulta la expresión:

$$e^{y'^2} + 2y' = 2\sin(t) + C.$$

Para demostrar que esta EDO se puede resolver para y' de manera única se debe analizar el término $e^{y'^2} = -2y'$ el cual se puede resolver para y' de manera única debido a que la recta $-2y'$ intersecta a la función $e^{y'^2}$ en un solo punto.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

2.5. Ejercicios Propuestos.

Propuesto 2.1. *La velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_0 del aire, es decir*

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_0), \quad K > 0.$$

(a) Determine T.
(b) Si $T_0 = 20$ grados Celcius y el cuerpo se enfria desde 100 a 60 grados Celcius en veinte minutos se pide calcular en cuanto tiempo la temperatura del cuerpo descenderá hasta 30 grados Celcius.
(c) Cual es la temperatura limite ($t \to \infty$) del cuerpo.

Soluciones:

$$\begin{array}{ll} (a) & T(t) = T_0 + C \cdot e^{kt}, \\ (b) & 60 \quad minutos, \\ (c) & 20^oC. \end{array}$$

Propuesto 2.2. *En un circuito RC la fuente de voltaje $f(t)$ es tal que si el voltaje en el condensador v_C supera o es igual a $v_0/2$ tomará el valor $f(t) = -v_0$. Si v_C es menor o igual a -$v_0/2$ entonces $f(t)$ tomará el valor $f(t) = v_0$.*

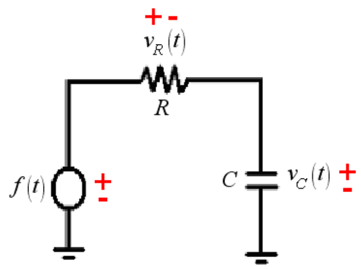

FIGURA 7. Circuito RC

El voltaje v_C es una función continua y satisface la ecuación diferencial:

$$RC \cdot \frac{dv_C}{dt} + v_C = f(t),$$
$$f(0) = v_0, v_C(0) = 0.$$

(a) Grafique la evolución en el tiempo del voltaje en el condensador, indicando intersecciones con el eje de las abscisas y puntos relevantes.

(b) Indique el período del voltaje en el condensador y grafique el voltaje en la resistencia.

Datos:

$$v_C(t) + v_R(t) = f(t)$$
$$v_R(t) = i(t)R = RC \cdot \frac{dv_C}{dt}$$

<u>Soluciones:</u>

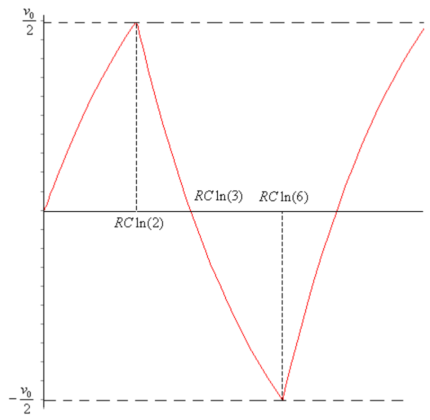

FIGURA 8. Voltaje en el condensador $v_C(t)$

El período del voltaje en el condensador es $2RC\ln(3)$.

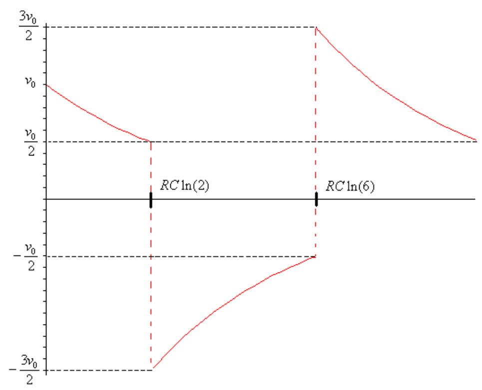

FIGURA 9. Voltaje en la resistencia $v_R(t)$

Propuesto 2.3. *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales :*

(a) $\dfrac{y^2y'}{x^4} + e^{x^5+y^3} = 0$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Además la solución $y(x)$ se hace cero cuando x tiende a menos infinito.

(b) $y' = \frac{y}{x} + x^4y^2 - x^6$

(c) $y' - y^2 \arctan y = \arctan y + [3(\arctan y)^2 - 2](1 + y^2)$

Soluciones:

$$(a) \quad y(x) = \sqrt[3]{-\ln\left(\frac{3}{5}e^{x^5} + 1\right)}, \quad (b) \quad y(x) = -\tanh\left(\frac{1}{6}x^6 + C\right)x.$$

$$(c) \quad y(t) = \tan\left(\frac{1}{Ce^{5t} + \frac{3}{5}} - 1\right).$$

Propuesto 2.4. *Un esquiador de masa M baja por una ladera inclinada con un ángulo respecto a la horizontal, sometiendo además de la fuerza de roce cinética con la nieve con constante μ_k una fuerza de roce viscosa de la forma $-2\beta mv$ La ecuación de movimiento del esquiador es:*

$$mg\sin\alpha - 2\beta m\frac{dx}{dt} - \mu_k mg\cos\alpha = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Si $\tan(\alpha) > \mu_k$ *:*
(a) Determine la rapidez del esquiador en función del tiempo $\frac{dx}{dt}(t)$.
(b) Determine la rapidez límite, es decir cuando $t \to \infty$.
(c)Determine la posición en función del tiempo $(x(t))$.

Soluciones:

$$(a) \quad \frac{dx}{dt} = \left(g\sin\alpha - \eta_k g\cos\alpha - Ce^{-2\beta t}\right) \cdot \frac{1}{2\beta},$$
$$(b) \quad \frac{1}{2\beta}(g\sin\alpha - \eta_k g\cos\alpha),$$
$$(c) \quad x(t) = \frac{g}{2\beta}(\sin\alpha - \eta_k\cos\alpha)t + C_1e^{-2\beta t} + C_2.$$

Propuesto 2.5. *Resuelva la siguiente ecuaciones diferenciales:*
(a) $\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$
(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x - y}{x + y}$
(c) $xyy' = 3y^2 + x^2, \quad y(-1) = 2.$
(d) $xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

(e) $\dfrac{dy}{dx} = (-5x+y)^2 - 4$

Soluciones:

$$\begin{array}{ll}(a) & x - 2\sqrt{y(x)-2x+3} - C = 0, \quad (b) \quad y(x) = -x \pm \sqrt{2x-C} \\ (c) & y(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{-2+18x^4}x, \quad (d) \quad y(x) = (-3\ln(x)+C)^{\frac{1}{3}}x \\ (e) & y(x) = \frac{C(3+5x)+(3-5x)e^{6x}}{C-e^{6x}}.\end{array}$$

Propuesto 2.6. *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales:*
(a) $y'(x) = x \cdot y^{\frac{1}{2}}, \quad y(0) = 1$
(b) $y' = 6e^{2x-y}, \quad y(0) = 0$
(c) $2x^{\frac{1}{2}}y' = \cos^2 y, \quad y(4) = \dfrac{\pi}{4}$

Soluciones:

$$\begin{array}{ll}(a) & y(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1, \quad (b) \quad y(x) = \ln(3e^{2x}-2) \\ (c) & y(x) = \arctan(\sqrt{x}-1).\end{array}$$

Propuesto 2.7. *Considere la siguiente ecuación no lineal:*

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x-y).$$

Encuentre la solución general y el dominio de definición de esta solución. Encuentre una solución de esta ecuación que satisfaga $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Soluciones:

$$y(x) = x - 2\arctan\left(\tfrac{x-2-C}{x-C}\right), \qquad y(x) = x - \tfrac{1}{2}\pi.$$

Propuesto 2.8. *Considere la siguiente ecuación no lineal:*

$$\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$$

Encuentre la solución que satisface $y(0) = 0$*, y dé el dominio de definición de esta solución.*

Solución:

$$y(x) = \tan(x) - x.$$

Propuesto 2.9. *Se tiene un sistema dinámico de primer orden de tiempo continuo, definido por la ecuación diferencial*

$$\dot{Y}(t) + 4Y(t) = 2U(t), \quad Y(0) = 1.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Suponga que la entrada $U(t)$ es un proceso estocástico de valor medio $\eta_U = 2t$ y función de autocorrelación $R_{UU}(t_1,t_2) = t_1 t_2$. Se pide analizar el proceso estocástico de salida $Y(t)$, encontrando su valor medio $\eta_Y(t)$ y autocorrelación $R_{YY}(t_1,t_2)$. Para esto tendrá que resolver las ecuaciones:

(1) $\dot{\eta}_Y + 4\eta_Y = 4t$ *para encontrar el valor medio* $\eta_Y(t)$.
(2) $\dfrac{\partial R_{UY}(t_1,t_2)}{\partial t_2} + 4R_{UY}(t_1,t_2) = t_1 t_2$ *para encontrar* $R_{UY}(t_1,t_2)$.
(3) $\dfrac{\partial R_{YY}(t_1,t_2)}{\partial t_1} + 4R_{YY}(t_1,t_2) = R_{UY}(t_1,t_2)$.

<u>Soluciones:</u>

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad \eta_k(t) = C_1 \cdot e^{-4t} + t - \frac{1}{4},\\
&(b) \quad R_{UY}(t_1,t_2) = C_2 \cdot e^{-4t_2} + \frac{1}{4}t_1\left(t_2 - \frac{1}{4}\right),\\
&(c) \quad R_{YY}(t_1,t_2) = C_3 \cdot e^{-4t_1} + \frac{1}{4}C_2 \cdot e^{-4t_2} + \frac{1}{256} - \frac{1}{64}(t_2+t_1) + \frac{1}{16}t_1 \cdot t_2.
\end{aligned}
$$

Propuesto 2.10. *Resuelva las siguientes ecuaciones:*
(a) $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^2y^2$.
(b) $\dfrac{dy}{dx} - 5y = -\dfrac{5}{2}xy^3$.
(c) $y' = -ty - ty^2$.
(d) $y' + (\cot(t))y + \dfrac{1}{\sin(t)}y^2 = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

<u>Soluciones:</u>

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad y(x) = -\frac{1}{(x-C)x}, \quad (b) y(x) = \pm\frac{10}{\sqrt{-5+50x+100e^{-10x}C}},\\
&(c) \quad y(t) = \frac{1}{-1+e^{\frac{1}{2}t^2}C}, \quad (d) \quad y(t) = \frac{1}{-\cos(t)+3\sin(t)}.
\end{aligned}
$$

Propuesto 2.11. *Muestre que con un cambio de variable adecuado la EDO:*

$$e^{-x^2}y' = 1 + 2(x-1)e^{-x^2}y + (e^{-2x^2}y^2),$$

es de tipo Ricatti con coeficientes constantes y resuelva.

<u>Solución:</u>

El cambio de variable es $u = y(x)\cdot e^{-x^2}$ y la solución es $y(x) = \left(\dfrac{1}{c-x} + 1\right)\cdot e^{x^2}$.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

3. Ecuaciones lineales de orden n

3.1. Propiedades generales. La ecuación diferencial lineal de orden n más general tiene la forma

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t). \tag{3.1}$$

Si $g(t) \equiv 0$ diremos que esta ecuación es *homogénea* y *no homogénea* en caso contrario.

Vamos a suponer de ahora en adelante la siguiente hipótesis.

(H_1) *Las funciones coeficientes a_i, $i = 0, \cdots, n$, y la función g están definidas en un intervalo común I, donde son continuas. Además $a_n(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.*

Definición 3.1. *Sean $f_1, ..., f_n$, n funciones definidas en un intervalo común I. Decimos que estas funciones son linealmente dependientes en I si existen constantes $c_1, \cdots, c_n$ no todas nulas tal que*

$$c_1 f_1(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0 \quad \text{para todo} \quad t \in I.$$

Decimos que $f_1, \cdots, f_n$ son linealmente independientes si

$$c_1 f_1(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0 \quad \text{para todo} \quad t \in I$$

implica que $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Ejemplo 3.1.

$$f_1(t) = t, \qquad f_2(t) = |t|$$

Es inmediato ver que $\{f_1, f_2\}$ es un conjunto linealmente dependiente en el intervalo $[0, \infty)$. Sin embargo estas mismas funciones son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Ejemplo 3.2. *Las funciones*

$$f_1(t) = \cos kt, \quad f_2(t) = \sin kt, \quad k \neq 0,$$

son linealmente independientes en cualquier intervalo I. En efecto, supongamos que

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0 \quad \textit{para todo} \quad t \in I.$$

Como tenemos una identidad podemos derivar, obteniendo

$$c_1 f_1'(t) + c_2 f_2'(t) = 0 \quad \textit{para todo} \quad t \in I.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Reemplazando, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 \cos kt + c_2 \sin kt &= 0 \\ -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt &= 0. \end{aligned}$$

Como el determinante de los coeficientes es no nulo implica que $c_1 = c_2 = 0$. *Entonces la funciones* $\{\cos(kt), \sin(kt)\}$ *son linealmente independientes en el intervalo* I.

Más generalmente tenemos

Teorema 3.1. *Sean* f_1,...,f_n, n *funciones definidas en un intervalo* I, *donde cada una de ellas posee hasta la derivada* $n-1$. *Si el determinante*

$$\begin{vmatrix} f_1(t_0) & \cdots & f_n(t_0) \\ f_1'(t_0) & \cdots & f_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.2}$$

para algún $t_0 \in I$, *entonces* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *son linealmente independientes en ese intervalo.*

Definición 3.2. *La función determinante*

$$W(f_1, \ldots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

se llama el Wronskiano de las funciones $f_1, \ldots, f_n$ *en I.*

Demostración del Teorema 3.1. Por contradicción, supongamos que existe un punto $t_0 \in I$ tal que (3.2) es cierta y que $f_1, \ldots, f_n$ son linealmente dependientes en I. Existen entonces constantes $c_1, \ldots, c_n$, no todas nulas, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t) = 0 \quad \forall\, t \in I.$$

Derivando $n-1$ veces se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c_i f_i'(t) &= 0 \qquad \forall\, t \in I \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i f_i^{(n-1)}(t) &= 0 \qquad \forall\, t \in I. \end{aligned}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Estas ecuaciones las podemos escribir como el sistema

$$\begin{pmatrix} f_1(t) & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0,$$

para cada $t \in I$. En particular para $t = t_0$, asi

$$\begin{pmatrix} f_1(t_0) & \cdots & f_n(t_0) \\ f_1'(t_0) & \cdots & f_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

Pero este sistema de ecuaciones tiene una solución no trivial, entonces el determinante de los coeficientes debe ser cero, esto es $W(f_1, \dots, f_n)(t_0) = 0$, que es una contradicción ■

Corolario 3.1. *Sean $f_1, \dots, f_n$ n funciones linealmente dependientes en I, entonces*

$$W(f_1, \dots, f_n)(t) = 0 \qquad \forall\ t \in I$$

Ejemplo 3.3. *Sean m_1, m_2, m_3 tres números reales distintos entre si y consideremos las funciones*

$$f_1(t) = e^{m_1 t},\ \ f_2(t) = e^{m_2 t},\ \ f_3(t) = e^{m_3 t}.$$

Afirmamos que estas funciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$. Para ver esto consideremos el wronskiano

$$W(f_1, f_2, f_3)(t) = \begin{vmatrix} e^{m_1 t} & e^{m_2 t} & e^{m_3 t} \\ m_1 e^{m_1 t} & m_2 e^{m_2 t} & m_3 e^{m_3 t} \\ m_1^2 e^{m_1 t} & m_2^2 e^{m_2 t} & m_3^2 e^{m_3 t} \end{vmatrix} = e^{(m_1+m_2+m_3)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \end{vmatrix}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Por lo tanto

$$W(f_1, f_2, f_3)(t) = -e^{(m_1+m_2+m_3)t}(m_1 - m_3)(m_2 - m_1)(m_3 - m_2).$$

El resultado se sigue entonces del Teorema 3.1.

Volvamos ahora a la ecuación diferencial lineal de orden n (3.1).

$$a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t),$$

para la cual suponemos que se satisface la hipótesis (H_1). Esta ecuación la vamos a escribir equivalentemente como

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)y^{(i)} = g(t), \tag{3.3}$$

con la convención $y^{(0)}(t) \equiv y(t)$.

Proposición 3.1. *(Principio de Superposición.) Sean $y_1 \dots y_k$, k soluciones de la ecuación homogenea*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)y^{(i)} = 0 \qquad \text{en } I. \tag{3.4}$$

Entonces la combinación lineal

$$Y(t) := \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(t),$$

donde los c_i, $i = 1, \dots, k$ son constantes, es también una solución de la ecuación homogenea en I.

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} a_j(t)Y^{(j)}(t) &= \textstyle\sum_{j=0}^{n} a_j(t) \sum_{i=1}^{k} c_i y_i^{(j)}(t) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i \underbrace{(\sum_{j=0}^{n} a_j(t)y_i^{(j)}(t))}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Ejemplo 3.4. *Consideremos la ecuación*

$$y'' + k^2 y = 0.$$

Sabemos que $y_1(t) = \cos kt$, $y_2(t) = \sin kt$ *son dos soluciones de esta ecuación definidas en* $\mathbb{R}$*, que son linealmente independientes en este intervalo. Formemos*

$$Y(t) = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt,$$

entonces Y *es también solucion. Podemos verificar esto directamente, derivando se tiene*

$$\begin{aligned} Y''(t) + k^2 Y(t) &= -k^2(c_1 \cos kt + c_2 \sin kt) + k^2(c_1 \cos kt + c_2 \sin kt) \\ &= c_1(k^2 \cos kt - k^2 \cos kt) + c_2(k^2 \sin kt - k^2 \sin kt) = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5. *Consideremos la ecuación*

$$y'' - k^2 y = 0.$$

Entonces

$$y_1(t) = e^{kt}, \qquad y_2(t) = e^{-kt},$$

son dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación en $\mathbb{R}$*. De la proposición 3.4, se tiene que*

$$Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

es también es solución.

A continuación vamos a estudiar un problema importante que llamamos problema con condición inicial para la ecuación diferencial (3.1) o equivalentemente ecuación (3.3). Este problema se escribe como

$$(I_n) \qquad \begin{cases} a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \\ y(t_0) = c_1,\ y'(t_0) = c_2, \cdots, y^{n-1}(t_0) = c_n, \end{cases}$$

donde suponemos que las constantes $c_1, \cdots, c_n$ y $t_0 \in I$ son datos del problema y que se satisface la condición (H_1).

En este problema se quiere encontrar una función y definida en un intervalo (que según se verá va a coincidir con I), que tenga n derivadas en I, que satisface la ecuación para cada $t \in I$ y las condiciones iniciales en t_0.

Por ejemplo para el caso $n = 2$ este problema se reduce a

$$(I_2) \qquad \begin{cases} a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \\ y(t_0) = c_1, \quad y'(t_0) = c_2. \end{cases}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Para el problema (I_n) se tiene el siguiente resultado general.

Teorema 3.2. *Sean $a_0(t), \cdots, a_n(t), g(t)$, funciones contínuas en un intervalo I tal que $a_n(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Sea $t_0 \in I$, entonces el problema con condición inicial (I_n) tiene una única solución definida en el intervalo I.*

Este teorema asegura dos cosas: la existencia de una función (solución) que satisface la ecuación diferencial (en I) y las condiciones iniciales y además que ella es única.

No vamos a demostrar este teorema todavía, pero lo haremos más adelante, como un caso particular, cuando tratemos sistemas de ecuaciones diferenciales.

A continuación y como consecuencia de este teorema vamos a estudiar algunas propiedades de la ecuación homogenea lineal de orden n (3.4). Primero una consecuencia inmediata de este teorema.

Corolario 3.2. *La función $y \equiv 0$, en I, es la única solución de la ecuación homogenea (3.4) que satisface las condiciones iniciales*

$$y(t_0) = 0,\ y'(t_0) = 0, \ldots, y^{n-1}(t_0) = 0,$$

y la llamamos la solución trivial.

Note que la solución trivial siempre satisface ecuación homogenea (3.4).

Teorema 3.3. *Sean $\{y_1 \ldots y_n\}$ n soluciones de la ecuación diferencial (3.4) definidas en I. Entonces $\{y_1 \ldots y_n\}$ es un conjunto de soluciones linealmente independientes, si y solo si*

$$W(y_1 \ldots y_n)(t) \neq 0, \qquad \forall\ t \in I.$$

Demostración. Si es el caso que $W(y_1 \ldots y_n)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, entonces por Teorema 3.1 se tiene que $\{y_1 \ldots y_n\}$ son funciones linealmente independientes.

Supongamos que $\{y_1 \ldots y_n\}$ son soluciones linealmente independientes de (3.4). Queremos probar que $W(y_1 \ldots y_n)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Para demostrar esto, vamos a probar equivalentemente que

$$W(y_1 \ldots y_n)(t_0) = 0, \qquad \text{para algún } t_0 \in I, \tag{3.5}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

implica que $\{y_1 \dots y_n\}$ son linealmente dependientes en I. Supongamos entonces (3.5) y formemos el sistema de n ecuaciones algebraicas

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ y_1'(t_0) & \cdots & y_n'(t_0) \\ y_1^{n-1}(t_0) & \cdots & y_n^{n-1}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0. \tag{3.6}$$

De (3.5) y Algebra Lineal se tiene que el sistema algebraico (3.6) tiene una solución

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \neq 0$$

Esto es una solución donde no todos los $c_i's$ son nulos. Formemos entonces

$$Y(t) := c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t). \tag{3.7}$$

Por el principio de superposición como $y_1(t) \dots y_n(t)$ son soluciones, $Y(t)$ también lo es. Además se satisface

$$Y(t_0) = 0, \quad Y'(t_0) = 0, \quad \ldots, \quad Y^{n-1}(t_0) = 0$$

Pero entonces, por el Corolario 3.2, se debe tener que

$$Y(t) = 0, \qquad \forall\ t \in I,$$

que de (3.7), nos da

$$c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t) = 0, \qquad \forall t\ \in I,$$

con $c_1 \dots c_n$ no todas nulas. Esto significa que $\{y_1 \dots y_n\}$ son linealmente dependientes en I. ■

Teorema 3.4. *Sean $\{y_1 \dots y_n\}$ n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogenea (3.4). Sea también Z(t) otra solución cualquiera de esta ecuación. Entonces existen constantes $c_1 \dots c_n$, tal que*

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t).$$

Demostración. Sea $t_0 \in I$ y consideremos el sistema algebraico

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(t_0) \\ Z'(t_0) \\ Z^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Como el determinante de los coeficientes de este sistema, que es el wronskiano

$$W(y_1 \cdots y_n)(t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

(las soluciones son linealmente independientes) se tiene de Algebra Lineal que este sistema tiene una única solución.

Llamemos $(\rho_1 \dots \rho_n)$ a esta solución y consideremos la función

$$G(t) = \rho_1 y_1(t) + \cdots + \rho_n y_n(t)$$

Es claro que G es solución de (3.4) y que considerando (3.8) satisface en t_0

$$G(t_0) = Z(t_0),\ G'(t_0) = Z'(t_0), \dots, G^{(n-1)}(t_0) = Z^{(n-1)}(t_0).$$

Por Teorema 3.2 (parte de unicidad), se debe tener que

$$Z(t) = G(t) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i y_i(t) \qquad \forall\ t \in I.$$

Se concluye la demostración definiendo $c_i = \rho_i$, $i = 1 \dots n$. ■

Hasta el momento hemos supuesto que existe un conjunto de soluciones linealmente independientes $\{y_1 \dots y_n\}$ de la ecuación (3.4). Vamos a verificar que esto es así en el siguiente teorema.

Teorema 3.5. *La ecuación (3.4) tiene un conjunto de soluciones $\{y_1 \dots y_n\}$ que son linealmente independientes en el intervalo I.*

Demostración. Para cada $i = 1 \dots n$, consideremos el problema con condición inicial,

$$\begin{cases} a_n(t)y^{(n)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \\ y(t_0) = 0,\ \cdots, y^{(i-1)}(t_0) = 1,\ \cdots, y^{(n-1)}(t_0) = 0, \end{cases}$$

donde $t_0 \in I$ es fijo. Por el Teorema (3.2), de existencia y unicidad, se tiene que este problema tiene una única solución definida en el intervalo I. Llamemos y_i a esta solución.

Vamos a probar que este conjunto $\{y_1 \dots y_n\}$ es linealmente independientes en el intervalo I. Para esto basta probar que

$$W(y_1 \dots y_n)(t_0) \neq 0,$$

para algun $t_0 \in I$. Se tiene

$$W(y_1 \dots y_n)(t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & \cdots & y_i(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & y_i^{i-1}(t_0) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{n-1}(t_0) & \cdots & y_i^{n-1}(t_0) & \cdots & y_n^{n-1}(t_0) \end{bmatrix}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Por lo tanto, del Teorema 3.1, $\{y_1 \ldots y_n\}$ son linealmente independientes en I.

A continuación estudiamos la estructura del espacio de soluciones de la ecuación (3.4).

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las funciones $y : I \mapsto \mathbb{R}$ que son solución de la ecuación (3.4), esto es

$$\mathcal{S} = \{y : I \to \mathbb{R} \mid y \text{ es solución de } (3.4)\}.$$

Notemos que si α, β son escalares reales e $y_1 \in \mathcal{S}$, $y_2 \in \mathcal{S}$, entonces $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{S}$, ya que cualquier combinación lineal de soluciones es solución, por el principio de superposición. Además claramente la solución trivial está en $\mathcal{S}$.

Este argumento nos dice que $\mathcal{S}$ tiene la estructura de un espacio vectorial (espacio lineal). Más aún, Teorema (3.4) nos dice que $\dim \mathcal{S} = n$. Así, hemos demostrado.

Teorema 3.6. *El conjunto de soluciones $\mathcal{S}$ de la ecuación (3.4) es un espacio vectorial de dimensión n.*

Una base de soluciones en este espacio esta formada por cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes.

Por ejemplo, en el caso de la ecuación

$$y'' + k^2 y = 0$$

una base de soluciones queda dada por $\{y_1, y_2\}$ donde $y_1(t) = \cos kt$, $y_2(t) = \sin kt$.

Sea $\{y_1 \ldots y_n\}$ una base de soluciones de la ecuación (3.4). Entonces sabemos que para cualquier solución y, existen constantes $c_1 \ldots c_n$ tal que

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t).$$

Por esta razón la expresión

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t),$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

donde ahora $c_1 \dots c_n$ son constantes arbitrarias, la llamamos la solución general de la ecuación homogenea (3.4) (más adelante la denotaremos por $y_h(t)$).

Ejemplo 3.6. *Consideremos el problema*

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Queremos encontrar un conjunto de tres soluciones linealmente independientes, es decir una base de soluciones de esta ecuación. Intentamos soluciones de la forma

$$y(t) = e^{\alpha t}.$$

Derivando y substituyendo en la ecuación, se tiene

$$(\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6)e^{\alpha t} = 0 \qquad \forall\ t \in \mathbb{R},$$

por lo que

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6 = 0.$$

Se tiene que $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, y $\alpha_3 = 3$ son raices de esta ecuación, ellas dan origen a las tres soluciones

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{2t}, \quad y_3(t) = e^{3t}.$$

Como α_1, α_2, α_3 son distintas entre si, sabemos que son linealmente independientes en $\mathbb{R}$. En consecuencia la solución general de la ecuación diferencial es dada por

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{3t},$$

con c_1, c_2 y c_3 constantes arbitrarias.

Consideremos ahora la ecuación no homogenea (3.3)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)y^{(i)} = g(t),$$

para la cual como en el caso de la ecuación homogenea queremos encontrar una representación para la solución general. La ecuación homogenea asociada a esta ecuación es

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)y^{(i)} = 0.$$

Sea $\{y_1, \dots, y_n\}$ una base de soluciones de esta ecuación. y supongamos que por algún método hemos encontrado una solución de la ecuación no homogenea que llamamos y_p, por solución particular. Sea también y una solución cualquiera de la ecuación no homogenea y definamos una función z por $z(t) := y(t) - y_p(t.)$ Se tiene que

$$\sum_{j=0}^{n} a_i(t)z^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_i(t)y^{(j)}(t) - \sum_{j=0}^{n} a_i(t){y_p}^{(j)}(t) = g(t) - g(t) = 0.$$

Entonces z es solución de la ecuación homogenea y por lo tanto existen constantes $c_1, \ldots, c_n$, tal que $z(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i y_i(t)$. De aquí,

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i y_i(t) + y_p(t),$$

expresión que llamamos la solución general de la ecuación no homogenea. Reconociendo que la expresión $\sum_{i=0}^{n} c_i y_i(t)$ es lo que hemos llamado la solución general de la ecuación homogenea, la llamaremos de ahora en adelante y_h. Se tiene entonces que la solución general de la ecuación no homogenea se puede escribir como

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Ejemplo 3.7. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3t, \tag{3.9}$$

y llamemos y a la solución general de esta ecuación. La ecuación homogenea asociada es

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0,$$

y sabemos que su solución general queda dada por

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t},$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes arbitrarias. Falta conocer $y_p(t)$, la cual vamos a encontrar de la siguiente forma. Suponemos que $y_p(t) = At + B$. Reemplazando en la ecuación diferencial (3.9), nos da un par de ecuaciones algebraicas de las cuales determinamos A y B. Efectuando los cálculos se obtiene $A = -\frac{1}{2}$ y $B = -\frac{11}{12}$. Entonces, la solución general de la ecuación (3.9) es

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_e^{3t} - \frac{1}{2}t - \frac{11}{12}.$$

3.2. Ecuación de segundo orden homogénea. En esta sección queremos aplicar la teoría de la sección anterior a la ecuación diferencial

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \tag{3.10}$$

donde a_2, a_1, a_0 son funciones contínuas en un intervalo I, con $a_2(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, es decir se cumple la condición (H_1).

De acuerdo a lo visto para encontrar la solución general de la ecuación (3.10) tenemos que encontrar dos soluciones linealmente independientes, es decir una base de soluciones para esta ecuación. Consideremos dos ejemplos.

Ejemplo 3.8. *Consideremos la ecuación*

$$t^2 y'' + 8ty' + 12y = 0, \quad t \in (0, +\infty).$$

Intentamos soluciones de la forma $y(t) = t^m$. Derivando

$$y'(t) = mt^{m-1}, \qquad y''(t) = m(m-1)t^{m-2}.$$

y formando el lado izquierdo de la ecuación, se obtiene que

$$\begin{aligned} t^2y'' + 8ty' + 12y &= t^2m(m-1)t^{m-2} + 8tmt^{m-1} + 12t^m \\ &= (m(m-1) + 8m + 12)t^m. \end{aligned}$$

De aqui que $y(t) = t^m$ será solución si

$$m(m-1) + 8m + 12 = m^2 + 7m + 12 = (m+3)(m+4) = 0.$$

Este polinomio tiene las dos raices,

$$m_1 = -3, \quad m_2 = -4,$$

lo que nos da las dos soluciones linealmente independientes

$$y_1(t) = t^{-3}, \quad y_2(t) = t^{-4},$$

con lo que la solución general de la ecuación es

$$y(t) = C_1t^{-3} + C_2t^{-4}.$$

Consideremos a continuación un ejemplo donde el método anterior nos da solo una solución.

Ejemplo 3.9. *Consideremos la ecuación*

$$t^2y'' - 3ty' + 4y = 0, \quad t \in (0, +\infty).$$

Como antes intentamos soluciones de la forma $y(t) = t^m$. Derivando, se tiene que

$$y'(t) = mt^{m-1}, \qquad y''(t) = m(m-1)t^{m-2}.$$

Formando el lado izquierdo de la ecuación

$$\begin{aligned} t^2y'' - 3ty' + 4y &= t^2m(m-1)t^{m-2} - 3tmt^{m-1} + 4t^m \\ &= (m(m-1) - 3m + 4)t^m. \end{aligned}$$

De aqui que $y(t) = t^m$ será solución si

$$m(m-1) - 3m + 4 = (m-2)^2 = 0.$$

Este polinomio tiene una raiz con multiplicidad 2,

$$m_{1,2} = 2,$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

lo que nos da solo una solución de la ecuación $y_1(t) = t^2$.

Para completar la base tenemos entonces que usar otro método el cual lo vamos a explicar para el caso general. Se deja como ejercicio completar la base para este ejercicio.

Partimos de la ecuación (3.10) que escribimos en la forma:

$$y'' + P(t)y' + Q(t)y = 0 \tag{3.11}$$

donde

$$P(t) = \frac{a_1(t)}{a_2(t)} \quad \text{y} \quad Q(t) = \frac{a_0(t)}{a_2(t)}.$$

Suponemos que se conoce una solución y_1 de este problema y queremos completar la base.

Por condiciones técnicas vamos a suponer también que $y_1(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Si esta condición no se satisface entonces el método se aplica en cualquier subintervalo de I donde ella se se cumpla.

Intentamos una solución en la forma

$$y(t) = u(t)y_1(t). \tag{3.12}$$

Derivando y formando la ecuación (3.11) se obtiene:

$$0 = y''+P(t)y'+Q(t)y = y_1(t)u''+(2y_1'(t)+P(t)y_1(t))u'+(\underbrace{y_1'' + P(t)y_1' + Q(t)y}_{=0})u,$$

de donde y, dado por (3.12), será solución si u satisface

$$y_1(t)u'' + (2y_1'(t) + P(t)y_1(t))u' = 0.$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$u'' + \left(\frac{2y_1'(t)}{y_1(t)} + P(t)\right) u' = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $u' = w$, se obtiene que w satisface

$$w' + \underbrace{\left(\frac{2y_1'(t)}{y_1(t)} + P(t)\right)}_{\widetilde{P}(t)} w = 0,$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

que es una lineal de primer orden. Ahora

$$e^{\int \widetilde{P}(t)dt} = y_1(t)^2 e^{\int P(t)dt},$$

de donde

$$\left(w' + \widetilde{P}(t)w\right)e^{\int \widetilde{P}(t)dt} = 0,$$

nos da

$$\left(y_1(t)^2 e^{\int P(t)dt} w(t)\right)' = 0.$$

Integrando

$$w(t) = u'(t) = \frac{C_2}{y_1(t)^2} e^{-\int P(t)dt},$$

de donde una nueva integración nos da

$$u(t) = C_1 + C_2 \int \frac{1}{y_1(t)^2} e^{-\int P(t)dt} dt.$$

De aqui y de (3.12), $y(t)$ queda dado por

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_1(t) \int \frac{e^{-\int P(t)dt}}{y_1(t)^2} dt. \tag{3.13}$$

Una segunda solución es dada entonces por

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int P(t)dt}}{y_1(t)^2} dt.$$

Mostramos a continuación que y_1, y_2 son linealmente independientes en I.

Para esto formamos el correspondiente wronskiano

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2)(t) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1(t) & y_1(t) \displaystyle\int \frac{e^{-\int P(t)dt}}{y_1^2(t)} dt \\ y_1'(t) & y_1'(t) \displaystyle\int \frac{e^{-\int P(t)dt}}{y_1^2(t)} dt + \frac{y_1(t) e^{-\int P(t)dt}}{y_1^2(t)} \end{vmatrix} \\
&= e^{-\int P(t)dt} \neq 0 \qquad \text{en } I
\end{aligned}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Por lo tanto y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes en I de la ecuación diferencial (3.11) (respectivamente (3.10)), y la solución general de esta ecuación es entonces (3.13).

3.3. EDO lineal de orden n con coeficientes constantes. Consideremos primero el caso de la ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{3.14}$$

donde a, b y c son constantes con $a \neq 0$. Intentando soluciones de la forma $y(t) = e^{mt}$, derivando, y reemplazando en la ecuación (3.14), se obtiene

$$(am^2 + bm + c)e^{mt} = 0.$$

Por lo tanto y es solución de (3.14) si m es una raíz del polinomio

$$p(m) = am^2 + bm + c. \tag{3.15}$$

Dependiendo de las raíces se obtienen distintos casos.

(a) $p(m) = 0$ tiene dos raíces reales y distintas m_1 y m_2. Entonces $y_1(t) = e^{m_1 t}$ y $y_2(t) = e^{m_2 t}$ son soluciones linealmente independientes que forman una base de soluciones. La solución general en este caso es dada por

$$y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t},$$

donde $c_1 \quad y \quad c_2$ son constantes reales arbitrarias.

(b) $p(m) = 0$ tiene una raíz real m_1 de multiplicidad dos, la cual da orígen a la solución $y_1(t) = e^{m_1 t}$. Para encontrar otra solución linealmente independiente usamos el método de la sección anterior. Así usando la formula

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\int P(t)dt} dt$$

con $P(t) = \frac{b}{a}$ y $m_1 = -\frac{b}{2a}$, se obtiene la solución $y_2(t) = te^{m_1}$. Las soluciones y_1 e y_2 son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ por lo que la solución general de (3.14) es

$$y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_1 t} = (c_1 + c_2 t)e^{m_1 t}.$$

(c) $p(m) = 0$ tiene raíces complejas, que deben ser complejas conjugadas y que denotamos por $m_1 = \alpha + i\beta,\ m_2 = \alpha - i\beta$, con $\beta \neq 0$. En este caso las expresiones

$$y_1(t) = e^{(\alpha + i\beta)t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{(\alpha - i\beta)t},$$

son soluciones complejas de (3.14). Estas se pueden escribir como

$$y_1(t) = u(t) + iv(t), \quad y_2(t) = u(t) - iv(t),$$

donde

$$u(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{y} \quad v(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

A partir de que y_1 e y_2 son soluciones complejas de (3.14) es inmediato ver que u y v son soluciones reales de esta ecuación. También, derivando, se puede demostrar directamente que u y v son soluciones linealmente independientes en $\mathbb{R}$ de (3.14). De esta forma la solución general de (3.14) se puede escribir como:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t = \big(c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t\big)e^{\alpha t}.$$

Ejemplo 3.10.

$$3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0$$

En este caso $p(m) = 3m^2 + 2m + 1$, *que tiene como raices*

$$m_1 = \frac{-1+i\sqrt{2}}{3} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{-1-i\sqrt{2}}{3}.$$

La solución general de esta ecuación es

$$y(t) = e^{-t/3}\big(c_1\cos\frac{\sqrt{2}t}{3} + c_2\sin\frac{\sqrt{2}t}{3}\big).$$

Consideremos ahora el caso de la ecuación de orden n. Tiene la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{3.16}$$

donde $a_0, a_1, ..., a_n$ son constantes reales, con $a_n \neq 0$. Como en el caso de $n = 2$ vamos a intentar solución de la forma $y(t) = e^{mt}$. Derivando y reemplazando en (3.16), se obtiene

$$p(m)e^{mt} = 0,$$

donde

$$p_n(m) = a_n m^n + ... + a_1 m + a_0,$$

que vamos a llamar el polinomio característico de la ecuación de orden n.

Así tendremos soluciones de (3.16) de la forma $y(t) = e^{mt}$ cada vez que m sea una raíz del polinomio característico. Como en el caso de la ecuación de segundo orden hay varios casos dependiendo de las raíces. A continuación vamos a estudiar las distintas situaciones que suceden.

Caso 1. $p_n(m) = 0$ tiene n raíces reales y distintas $m_1, m_2, ..., m_n$. Esto da orígen a las n soluciones linealmente independientes:

$$y_1(t) = e^{m_1 t}, \ldots, y_n(t) = e^{m_n t},$$

que forman una base de soluciones para este caso. La solución general es entonces

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{m_i t}.$$

Caso 2. $p_n(m) = 0$ tiene una sola raíz real m, de multiplicidad n. Digamos

$$p_n(m) = a_n(m - m_1)^n.$$

Vamos a motivar la búsqueda de la base de soluciones para este caso por medio de un caso particular. Consideremos la ecuación diferencial

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

El polinomio característico correspondiente es

$$p_3(m) = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m + 1)^3$$

que tiene como raíz a $m_1 = -1$ con multiplicidad 3. Esto da solo una solución de la forma exponencial $y_1(t) = e^{-t}$, y por lo tanto tenemos que completar la base por un medio distinto.

Definamos la función de dos variables $u(t, \alpha) = e^{\alpha t}$. Se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \alpha) = \alpha e^{\alpha t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \alpha) = \alpha^2 e^{\alpha t}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t, \alpha) = \alpha^3 e^{\alpha t}.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t, \alpha) + 3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \alpha) + 3\frac{\partial u}{\partial t}(t, \alpha) + u(t, \alpha) \\ &= \frac{\partial^3}{\partial t^3}(e^{\alpha t}) + 3\frac{\partial^2}{\partial t^2}(e^{\alpha t}) + 3\frac{\partial}{\partial t}(e^{\alpha t}) + e^{\alpha t} \\ &= (\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1)e^{\alpha t} = (\alpha + 1)^3 e^{\alpha t} \end{aligned} \tag{3.17}$$

expresión que es una identidad. Derivando (3.17) parcialmente con respecto a α, se obtiene

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}(\frac{\partial u}{\partial \alpha}(t, \alpha)) + 3\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\partial u}{\partial \alpha}(t, \alpha)) + 3\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial \alpha}(t, \alpha)) + \frac{\partial u}{\partial \alpha}(t, \alpha)$$

$$= \frac{\partial^3}{\partial t^3}(te^{\alpha t}) + 3\frac{\partial^2}{\partial t^2}(te^{\alpha t}) + 3\frac{\partial}{\partial t}(te^{\alpha t}) + te^{\alpha t} = 3(\alpha + 1)^2 e^{\alpha t} + t(\alpha + 1)^3 e^{\alpha t} \tag{3.18}$$

Derivando nuevamente con respecto a α, obtenemos

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}(t^2 e^{\alpha t}) + 3\frac{\partial^2}{\partial t^2}(t^2 e^{\alpha t}) + 3\frac{\partial}{\partial t}(t^2 e^{\alpha t}) + t^2 e^{\alpha t}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$= 6(\alpha+1)e^{\alpha t} + 6(\alpha+1)^2 te^{\alpha t} + t^2(\alpha+1)^3 e^{\alpha t} \tag{3.19}$$

Notemos a continuación que se tiene la siguiente propiedad:

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i}(t^k e^{\alpha t})_{\alpha=m_1} = \frac{d^i}{dt^i}(t^k e^{m_1 t}),$$

donde k es un entero no negativo. Usando esta propiedad, y evaluando (3.17), (3.18) y (3.19) para $\alpha = m_1$ se obtienen respectivamente las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d^3}{dt^3}(e^{m_1 t}) + 3\frac{d^2}{dt^2}(e^{m_1 t}) + 3\frac{d}{dt}(e^{m_1 t}) + e^{m_1 t} = (m_1+1)^3 e^{m_1 t}, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dt^3}(te^{m_1 t}) + \frac{d^2}{dt^2}(te^{m_1 t}) + \frac{d}{dt}(te^{m_1 t}) + te^{m_1 t}& \\ = 3(m_1+1)^2 e^{m_1 t} + t(m_1+1)^3 e^{m_1 t},&\end{aligned} \tag{3.21}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dt^3}(t^2e^{m_1 t}) + \frac{d^2}{dt^2}(t^2e^{m_1 t}) + \frac{d}{dt}(t^2e^{m_1 t}) + t^2e^{m_1 t}& \\ = 6(m_1+1)e^{m_1 t} + 6(m_1+1)^2 te^{m_1 t} + t^2(m_1+1)^3 e^{m_1 t}.&\end{aligned} \tag{3.22}$$

Pero $m_1 = -1$, por lo que los segundos miembros de (3.20), (3.21) y (3.22), son cero. Se obtiene entonces que las funciones

$$y_1(t) = e^{m_1 t}, \qquad y_2(t) = te^{m_1 t}, \qquad y_3(t) = t^2 e^{m_1 t}$$

son soluciones de la ecuación diferencial. Veamos que son soluciones linealmente independientes. Para esto evaluamos el wronskiano

$$W(y_1,y_2,y_3)(t) = \begin{vmatrix} e^{m_1t} & te^{m_1t} & t^2e^{m_1t} \\ m_1e^{m_1t} & e^{m_1t}+m_1te^{m_1t} & 2te^{m_1t}+t^2m_1e^{m_1t} \\ m_1^2e^{m_1t} & 2m_1e^{m_1t}+m_1^2te^{m_1t} & 2e^{m_1t}+4tm_1e^{m_1t}+t^2m_1^2e^{m_1t} \end{vmatrix}$$

en $t=0$, obteniendo

$$W(y_1,y_2,y_3)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_1 & 1 & 0 \\ m_1^2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

por lo que estas soluciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$. La solución general del problema es finalmente

$$y(t) = (c_1 + c_2t + c_3t^2)e^{m_1t}.$$

El caso general se demuestra de la misma forma, aunque claramente en forma más técnica. En este caso m_1 es raíz real de multiplicidad n, así que el polinomio caracteristico tiene la forma

$$p_n(m) = a_n(m-m_1)^n.$$

La base de soluciones está dada por el conjunto de soluciones linealmente independientes

$$y_1(t) = e^{m_1t},\ y_2(t) = te^{m_1t}, \ldots,\ y_n(t) = t^{n-1}e^{m_1t},$$

por lo que la solución general es

$$y(t) = (c_1 + c_2t + c_3t^2 + \cdots + c_nt^{n-1})e^{m_1t}.$$

Caso 3. Suponemos ahora que el polinomio característico $p_n(m)$ tiene una raíz real m_1 de multiplicidad k y el resto de las raíces son reales y simples. Razonando como en los casos anteriores se puede demostrar que una base de soluciones está formada de la siguientes manera. Para la raíz m_1 se obtienen las soluciones

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$y_1(t) = e^{m_1 t},\ y_2(t) = te^{m_1 t}, \dots,\ y_k(t) = t^{k-1}e^{m_1 t},$$

y para el resto de las raíces $m_{k+1}, \dots, m_n$, las soluciones

$$y_{k+1}(t) = e^{m_{k+1} t}, \dots,\ y_n(t) = e^{m_n t}.$$

Estas n funciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$. La solución general se puede escribir entonces como

$$y(t) = (c_1 + \cdots + c_k t^{k-1})e^{m_1 t} + c_{k+1}e^{m_{k+1} t} + \ldots + c_n e^{m_n t}.$$

Caso 4. Las raíces del polinomio característico $p_n(m)$ son todas reales y son tales que dos de ellas tienen multiplicidad, m_1 con multiplicidad k_1 y m_2 con multiplicidad k_2, el resto de las raíces (si es que existen) $m_{k_1+k_2+1}, \dots, m_n$, son simples. En este caso la base de soluciones está formada por las funciones

$$y_1(t) = e^{m_1 t}, \dots, y_{k_1}(t) = t^{k_1-1}e^{m_1 t}$$

asociadas a la raíz m_1,

$$y_{k_1+1}(t) = e^{m_2 t},\ y_{k_1+2}(t) = te^{m_2 t}, \dots, y_{k_1+k_2}(t) = t^{k_2-1}e^{m_2 t}$$

asociadas a la raíz m_2, y

$$y_{k_1+k_2+1}(t) = e^{m_{k_1+k_2+1} t}, \dots, y_n(t) = e^{m_n t}$$

que están asociadas al resto de las raíces. Estas n funciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ y por lo tanto la solución general se puede escribir como

$$y(t) = (c_1 + \ldots + c_{k_1} t^{k_1-1})e^{m_1 t} + (c_{k_1+1} + \ldots + c_{k_1+k_2} t^{k_2-1})e^{m_2 t}$$
$$+ c_{k_1+k_2+1}e^{m_{k_1+k_2+1} t} + \ldots + c_{m_n} e^{m_n t}.$$

Ejemplo 3.11. *Resuelva la ecuación diferencial*

$$y^{(iv)} - 2y'' + y = 0$$

El polinomio característico correspondiente es

$$p(m) = m^4 - 2m^2 + 1 = (m^2 - 1)^2 = (m + 1)^2(m - 1)^2$$

que tiene las raíces $m_1 = 1$*,* $m_2 = -1$*, ambas con multiplicidad 2, con lo que la base de soluciones está dada por*

$$e^t, \qquad te^t, \qquad e^{-t}, \qquad te^{-t}.$$

La solución general es entonces

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + (c_3 + c_4 t)e^{-t}.$$

Caso 5. Suponemos que $p_n(m)$ tiene un par de raíces complejas conjugadas $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, con $\beta \neq 0$, y el resto de las raíces $m_3, \ldots, m_n$ son reales y simples. Tal como antes se puede demostrar que para las raíces m_1 y m_2 se obtienen las soluciones reales

$$y_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t \qquad y_2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

y para el resto de las raíces las soluciones

$$e^{m_3 t}, \ldots, e^{m_n t}.$$

Así la solución general se escribe como

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t + c_3 e^{m_3 t} + \cdots + c_{m_n} e^{m_n t}.$$

Ejemplo 3.12. *Resuelva la ecuación diferencial*

$$y''' - 8y = 0.$$

El polinomio característico correspondiente es

$$p(m) = m^3 - 8 = (m - 2)(m^2 + 2m + 4)$$

que tiene las raíces $m_1 = 2$*,* $m_2 = -1 + i\sqrt{3}$*,* $m_2 = -1 - i\sqrt{3}$*, con lo que la base de soluciones está dada por*

$$e^{2t}, \qquad e^{-t}\cos(\sqrt{3}t), \qquad e^{-t}\sin(\sqrt{3}t).$$

La solución general es entonces

$$y(t) = c_1 e^{2t} + (c_2\cos(\sqrt{3}t) + c_3\sin(\sqrt{3}t))e^{-t}.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Consideremos un último caso.

Caso 6. Suponemos que el polinomio característico $p_n(m)$ tiene una raíz compleja, $m_1 = \alpha + i\beta$ de multiplicidad k, y por lo tanto tiene también a $m_2 = \alpha - i\beta$, como raíz con multiplicidad k. Para simplificar vamos a suponemos que no hay más raíces lo que implica que $n = 2k$. En este caso se puede demostrar que la base de soluciones esta formada por las funciones:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t, \cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

De esta forma la solución general es

$$\begin{aligned} y(t) = e^{\alpha t}&(c_1 + c_2 t + \cdots + c_k t^{k-1})\cos\beta t \\ &+e^{\alpha t}(d_1 + d_2 t + \cdots + d_k t^{k-1})\sin\beta t. \end{aligned}$$

Ejercicio. Encuentre la base de soluciones y la solución general si en Caso 6 se tiene que $n > 2k$ y además el polinomio característico tiene $n - 2k$ raíces reales y simples.

Ejemplo 3.13. *Encuentre la solución general para la ecuación diferencial*

$$y^{(iv)} + y = 0.$$

El polinomio característico es

$$p_4(m) = m^4 + 1 = (m^2 - i)(m^2 + i),$$

que tiene como raíces a

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{i}, \qquad m_{3,4} = \pm\sqrt{-i}.$$

Estas se pueden escribir como

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \qquad & m_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \\ m_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \qquad & m_4 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

La base de soluciones es entonces

$$e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \quad e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \quad e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \quad e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

La solución general se puede representar como

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$y(t) = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\big(c_1 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{t}{\sqrt{2}}\big) + e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\big(d_1 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + d_2 \sin \frac{t}{\sqrt{2}}\big).$$

3.4. Método de variación de parámetros. Este método nos va a a permitir encontrar soluciones particulares de algunas ecuaciones diferencial con coeficientes variables. Comencemos con la ecuación diferencial

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t).$$

Como siempre suponemos que a_2, a_1, y a_0, g son funciones que satisfacen la condición (H_1) en un intervalo I. La ecuación la escribimos en la forma

$$y'' + P(t)y' + Q(t)y = f(t) \tag{3.23}$$

donde

$$P(t) = \frac{a_1}{a_2}(t), \qquad Q(t) = \frac{a_0}{a_2}(t), \qquad f(t) = \frac{g}{a_2}(t).$$

La ecuación homogénea asociada es

$$y'' + P(t)y' + Q(t)y = 0, \tag{3.24}$$

para la cual suponemos conocida una base de soluciones y_1, y_2. Así, la solución general de esta ecuación es

$$y_h(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t).$$

El método para para encontrar una solución particular $y_p(t)$ de (3.23) consiste en suponer

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

y reemplazar en (3.23) para encontrar dos ecuaciones para las funciones incógnitas u_1 y u_2. Derivando y reemplazando se obtiene

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$u_1(t)[\underbrace{y_1'' + P(t)y_1' + Q(t)y_1}_{=0}] + u_2(t)[\underbrace{y_2'' + P(t)y_2' + Q(t)y_2}_{=0}] + P(t)u_1'(t)y_1(t)$$
$$+P(t)u_2'(t)y_2(t) + 2u_1'(t)y_1'(t) + 2u_2'(t)y_2'(t) + u_1''(t)y_1(t) + u_2''(t)y_2(t) = f(t),$$

que dado que y_1 e y_2 satisfacen la ecuación homogenea se puede escribir como

$$P(t)[u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t)]$$
$$+u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) + \frac{d}{dt}[u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t)] = f(t) \tag{3.25}$$

Como necesitamos 2 ecuaciones para u_1 y u_2 suponemos que

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0, \tag{3.26}$$

quedando la ecuación (3.25) como

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = f(t). \tag{3.27}$$

Ecuaciones (3.26) y (3.27) son dos ecuaciones para u_1 y u_2. Usando matrices estas toman la forma

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Usando la regla de Kramer se obtiene que

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}, \quad \text{y} \quad u_2'(t) = \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}.$$

Notamos que $W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ porque y_1, y_2 son linealmente independientes en t. Integrando las expresiones para u_1' y u_2' se obtiene

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$u_1(t) = C_1 - \int \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt, \quad \text{y} \quad u_2(t) = C_2 + \int \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)},$$

de donde

$$u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) =$$
$$= C_1y_1(t) + C_2y_2(t) - y_1(t)\int \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt + y_2(t)\int \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}.$$

Como los dos primeros términos forman parte de la solución de la ecuación homogenea podemos tomar la solución particular como

$$y_p(t) = -y_1(t)\int \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt + y_2(t)\int \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}.$$

Con esto la solución general de la ecuación es

$$y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + y_p(t).$$

Ejemplo 3.14. *Resuelva la ecuación diferencial*

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = (t+5)^2e^{2t}.$$

La ecuación homogenea asociada es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0,$$

con polinomio característico $(m-2)^2 = 0$, y por lo tanto $m = 2$ es raíz de multiplicidad 2. De aquí que la solución general de la ecuación homogenea es

$$y_h(t) = (c_1 + c_2t)e^{2t}.$$

Para encontrar la solución particular de la no homogenea, usamos variación de parámetros. Se obtiene:

$$y_p(t) = -e^{2t}\left(\frac{t^4}{4} + \frac{10}{3}t^3 + \frac{25}{2}t^2\right) + te^{2t}\left(\frac{t^3}{3} + 5t^2 + 25t\right)$$

y, finalmente, la solución general es:

$$y(t) = (c_1 + c_2t)e^{2t} + y_p(t).$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Estudiemos a continuación como extender el método para ecuaciones de orden superior. Consideremos el siguiente caso.

$$y''' + P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = f(t), \tag{3.28}$$

donde las funciones coeficientes y f son continuas en un intervalo I. Como antes, suponemos conocida una base de soluciones $\{y_1, y_2, y_3\}$ de la ecuación homogenea asociada y postulamos como solución particular de (3.28)

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + u_3(t)y_3(t). \tag{3.29}$$

Derivando esta expresión se obtiene

$$y_p'(t) = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t) + u_3(t)y_3'(t) \tag{3.30}$$

donde hemos impuesto la condición de que

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) + u_3'(t)y_3(t) = 0. \tag{3.31}$$

Derivando (3.30) e imponiendo que

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_3'(t)y_3'(t) = 0, \tag{3.32}$$

se obtiene

$$y_p''(t) = u_1(t)y_1''(t) + u_2(t)y_2''(t) + u_3(t)y_3''(t). \tag{3.33}$$

Derivando esta expresión obtenemos

$$\begin{aligned} y_p'''(t) &= u_1(t)y_1'''(t) + u_2(t)y_2'''(t) + u_3(t)y_3'''(t) \\ &\quad + u_1'(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2''(t) + u_3'(t)y_3''(t). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Reemplazando (3.29), (3.30), (3.33) y (3.34) en (3.28) y utilizando que y_1, y_2, y_3 son soluciones de la ecuación homogenea asociada, se obtiene

$$u_1'(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2''(t) + u_3'(t)y_3''(t) = f(t). \tag{3.35}$$

Las ecuaciones (3.31), (3.32) y (3.35) se pueden escribir como el sistema

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t), \end{bmatrix}$$

para las incognitas u_1', u_2', u_3'. Así, usando la regla de Cramer, se obtiene que:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= f(t)\frac{W(y_2, y_3)}{W(y_1, y_2, y_3)} \\ u_2'(t) &= f(t)\frac{W(y_3, y_1)}{W(y_1, y_2, y_3)} \\ u_3'(t) &= f(t)\frac{W(y_1, y_2)}{W(y_1, y_2, y_3)}, \end{aligned}$$

donde $W(y_i, y_j)$ denota el wronskiano de las funciones y_i, y_j para $j = 1, 2, 3$, y $W(y_1, y_2, y_3)$ el wronskiano de las funciones y_1, y_2, y_3. Como en el caso anterior estas expresiones e integran y se forma

$$u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + u_3(t)y_3(t),$$

de donde se obtiene una solución particular.

En forma enteramente similar se puede encontrar una fórmula para encontrar una solución particular para una ecuación lineal de orden n. Esto se deja como ejercicio.

Para usar el método de variación de parámetros hay que conocer una base de soluciones de la ecuación homogenea asociada. Vamos a consider a continuación una clase de ecuaciones diferenciales a coeficientes variables donde esto es simple.

Ecuación de Euler-Cauchy. Tiene la forma:

$$a_n t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 t y' + a_0 y = g(t), \tag{3.36}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes con $a_n \neq 0$ y donde suponemos que $t > 0$. La ecuación homogenea asociada es

$$a_n t^n y^{(n)} + \ldots + a_1 t y' + a_0 y = 0. \tag{3.37}$$

Afirmamos que con la transformación de variable independiente $t = e^\tau$ la ecuación (3.36) y la ecuación (3.37), se transforman en ecuaciones a coeficientes constantes. Ilustramos esto para la ecuación de segundo orden.

$$a_2 t^2 y'' + a_1 t y' + a_0 y = g(t). \tag{3.38}$$

La ecuación homogenea asociada es

$$a_2 t^2 y'' + a_1 t y' + a_0 y = 0. \tag{3.39}$$

Denotando por $\bar{y}(\tau) = y(e^\tau)$ y derivando se obtiene respectivamente:

$$ty' = \frac{d\bar{y}}{d\tau} \qquad \text{y} \qquad t^2 y'' = \frac{d^2\bar{y}}{d^2\tau} - \frac{d\bar{y}}{d\tau}.$$

De esta forma la ecuación homogenea asociada

$$a_2 t^2 y'' + a_1 t y' + a_0 y = 0,$$

se transforma en la ecuación a coeficientes constantes siguiente:

$$a_2 \frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + (a_1 - a_2)\frac{d\bar{y}}{d\tau} + a_0 \bar{y} = 0.$$

El polinomio característico correspondiente es

$$p(m) = a_2 m^2 + (a_1 - a_2) m + a_0.$$

Denotando por m_1 y m_2 las raíces de este polinomio tenemos 3 casos.

Caso 1. m_1 y m_2 son reales y distintas. En este caso una base de soluciones es

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\bar{y}_1(\tau) = e^{m_1\tau}, \quad \bar{y}_2(\tau) = e^{m_2\tau}.$$

Caso 2. $m_1 = m_2 = m$. Una base de soluciones es

$$\bar{y}_1(\tau) = e^{m\tau}, \quad \bar{y}_2(\tau) = \tau e^{m\tau}.$$

Caso 3. Las raíces son complejas (conjugadas), $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, con $\beta \neq 0$. En este caso una base de soluciones es

$$\bar{y}_1(\tau) = e^{\alpha\tau} \cos \beta\tau, \quad \bar{y}_2(\tau) = e^{\alpha\tau} \sin \beta\tau.$$

Conocida estas bases, las expresamos en término de la variable t para obtener las bases correspondientes para la ecuación (3.39). Se tiene respectivamente:

Caso 1.

$$y_1(t) = t^{m_1}, \quad y_2(t) = t^{m_2}.$$

Caso 2.

$$y_1(t) = t^m, \quad y_2(t) = t^m \ln t.$$

Caso 3.

$$y_1(t) = t^\alpha \cos\left(\beta(\ln t)\right), \quad y_2(t) = t^\alpha \sin\left(\beta(\ln t)\right).$$

Estamos entonces en posición de obtener una solución particular de la ecuación (3.38) por medio del método de variación de parámetros. Sigamos con un ejemplo.

Ejemplo 3.15. *Resuelva la ecuación diferencial*

$$t^2y'' - 2ty' + 2y = t^4e^t.$$

Haciendo el cambio de variable $t = e^\tau$ *la ecuación homogenea asociada*

$$t^2y'' - 2ty' + 2y = 0,$$

se transforma en

$$\frac{d^2\bar{y}}{d^2\tau} - 3\frac{d\bar{y}}{d\tau} + 2\bar{y} = 0.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

El polinomio característico es $p(m) = m^2 - 3m + 2$, *con raíces* $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. *De aquí que la base de soluciones es*

$$\bar{y}_1(\tau) = e^{\tau}, \quad \bar{y}_2(\tau) = e^{2\tau}.$$

Volviendo a la variable t *esta base queda*

$$y_1(t) = t, \quad y_2(t) = t^2,$$

por lo que la solución general de la ecuación es

$$y_h(t) = c_1 t + c_2 t^2.$$

Para encontrar la solución particular usando variación de parámetros, partiendo de la ecuación escrita como

$$y'' - \frac{2y'}{t} + \frac{2y}{t} = t^2 e^t.$$

Ponemos $y_p = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$ *donde* u_1, u_2 *satisfacen:*

$$u_1'(t) = \frac{-y_2(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)},$$

$$u_2'(t) = \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)}.$$

Calculando el wronskiano, se obtiene

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2.$$

Entonces

$$u_1'(t) = -t^2 e^t, \quad y \quad u_2'(t) = te^t.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Integrando, se tiene

$$u_1(t) = -\int t^2 e^t dt = -t^2 e^t + 2te^t - 2e^t,$$

y

$$u_2(t) = \int te^t dt = te^t - e^t.$$

Con esto la solución de la ecuación queda

$$y(t) = c_1 t + c_2 t^2 + u_1(t)t + u_2(t)t^2 = c_1 t + c_2 t^2 + t^2 e^t - 2te^t.$$

Nota. Observamos que un procedimiento alternativo al expuesto consiste en transformar la ecuación.

$$a_2 t^2 y'' + a_1 t y' + a_0 y = g(t)$$

por medio del cambio de variables $t = e^\tau$, a

$$a_2 \frac{d^2\bar{y}}{d^2\tau} + (a_1 - a_2)\frac{d\bar{y}}{d\tau} + a_0 y = g(e^\tau),$$

resolver esta ecuación a coeficientes constantes, y volver después a las expresiones en términos de la variable t.

3.5. Método de los coeficientes indeterminados. Este método nos va a servir para encontrar soluciones particulares de la ecuación lineal no homogeneas a coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t), \tag{3.40}$$

donde $g : I \mapsto \mathbb{R}$ es una función continua y $a_1' \cdots, a_n$ son constantes reales.

Introducimos una notación operacional denotando por

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$D = \frac{d}{dt}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \ldots, D^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

Así la ecuación diferencial anterior la podemos escribir como

$$(a_n D^n + \ldots + a_1 D + a_0 I)y = g(t), \tag{3.41}$$

donde I denota el operador identidad. La expresión

$$P(D) = a_n D^n + \ldots + a_1 D + a_0 I, \tag{3.42}$$

la llamamos un operador diferencial de orden n (a coeficientes constantes). Como se puede ver inmediatamente $P(D)$ es un operador lineal sobre el espacio vectorial de las funciones $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Como motivación veremos algunos casos particulares de operadores diferenciales. Consideremos los tres operadores diferenciales:

$$P(D) = D^2 + D, \qquad Q(D) = D(D + I), \qquad R(D) = (D + I)D.$$

Se tiene

$$P(D)y = (D^2 + D)y = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt},$$

$$Q(D)y = D(D + I)y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} + y\right) = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt},$$

y

$$R(D)y = (D + I)Dy = \left(\frac{d}{dt} + I\right)\frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}$$

por lo tanto $P(D) = Q(D) = R(D)$, es decir

$$D^2 + D = D(D + I) = (D + I)D,$$

que interpretamos como que $P(D) = D^2 + D$ se puede factorizar en 2 factores que conmutan. En forma similar se demuestran los siguientes casos.

Para a y b números reales y n un entero positivo, se tiene:

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$(D^2+(a+b)D+abI)=(D+aI)(D+bI)=(D+bI)(D+aI),$$

$$(D^2+(a+b)D+abI)^n=(D+aI)^n(D+bI)^n=(D+bI)^n(D+aI)^n,$$

y si m es otro entero positivo, se tiene

$$(D^2+(a+b)D+abI)^n(D^2+(c+d)D+cdI)^m$$

$$=(D+aI)^n(D+bI)^n(D+cI)^m(D+dI)^m$$

$$=(D+bI)^n(D+aI)^n(D+dI)^m(D+cI)^m$$

$$=(D+cI)^m(D+aI)^n(D+dI)^m(D+bI)^n$$

$$=(D^2+(c+d)D+cdI)^m(D^2+(a+b)D+abI)^n.$$

Similarmente si $a_1,\ldots,a_n$ son números reales, se tiene:

$$(D+a_1I)\cdots(D+a_nI)=\prod_{j=1..n}(D+a_{k(j)}I)$$

donde $\{k(1),\ldots,k(n)\}$ es cualquier reordenamiento de $\{1,\ldots,n\}$. Note que esta expresión es tambien cierta si los $a_1,\ldots,a_n$ son números complejos.

Finalmente, si además $b_1,\ldots,b_n$ son números reales se tiene

$$(D^2+(a_1+b_1)D+a_1b_1I)\cdots(D^2+(a_n+b_n)D+a_nb_nI)$$

$$=\prod_{j=1..n}(D^2+(a_{k(j)}+b_{k(j)})D+a_{k(j)}b_{k(j)})$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Consideremos nuevamente la ecuación diferencial (3.41), que reescribimos como

$$p(D)y = g(t), \tag{3.43}$$

con $p(D)$ dado por (3.42). La ecuación homogenea asociada es

$$p(D)y = 0, \tag{3.44}$$

para la cual sabemos como encontrar sus soluciones. Hemos visto que estas soluciones forman un espacio vectorial lineal de dimensión n. Este espacio es exactamente el kernel del operador $p(D)$. Por abuso de notación $p(D)$ lo llamaremos también un polinomio (diferencial).

En el método de coeficientes indeterminados es conveniente introducir el concepto de polinomio anulador. Sea u una función suficientemente diferenciable y supongamos que $q(D)$ es un polinomio diferencial tal que $q(D)u = 0$. Entonces decimos que $q(D)$ es un polinomio anulador de u. Notamos que equivalentemente u debe estar en el kernel del operador $q(D)$.

En forma elemental se tiene:

Si $u(t) = k = cte$, entonces $D^n k = \dfrac{d^n k}{dt^n} = 0$ para todo $n \geq 1$.

Si $u(t) = t^n$, n entero positivo, entonces $D^m u = \dfrac{d^m u(t)}{dt^m} = 0$ para todo entero $m > n$.

Como consecuencia de esto último si

$$u(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_{n-1} t^{n-1} \tag{3.45}$$

donde $c_0, \cdots, c_{n-1}$ son constantes reales, entonces $D^m u = 0$, para todo entero $m \geq n$. Es decir D^m, $m \geq n$, es un anulador del polinomio en (3.45).

A continuación vamos a estudiar algunos casos particulares importantes.

- El operador

$$p(D) = (D - \alpha)^n \tag{3.46}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

es un polinomio anulador de las siguientes funciones:

$$e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, \cdots, t^{n-1}e^{\alpha t}, \qquad n \geq 1, \tag{3.47}$$

equivalentemente todas estas funciones están en $ker\ p(D)$.

En efecto, $p(D)u = 0$ es equivalente a la ecuación diferencial homogenea:

$$(D-\alpha)^n u = (\frac{d}{dt} - \alpha) \cdot \cdots \cdot (\frac{d}{dt} - \alpha)u = 0,$$

que tiene por polinomio característico a $p(m) = (m-\alpha)^n$ (usamos la misma letra para denotar el polinomio). Como el conjunto de raíces de este polinomio esta formando por una raíz real de multiplicidad n, entonces es claro que la familia de funciones (3.47) son anuladas por el polinomio diferencial , más aun forman una base de soluciones para la ecuación diferencial $p(D)u = 0$.

Ejemplo 3.16. *Encuentre un polinomio que anule a $u(t) = e^{-3t} + te^t$.*

Solución. Se tiene que $(D+3)$ anula a e^{-3t} y que $(D-1)^2$ anula a te^t, por lo tanto $(D+3)(D-1)^2$ es un polinomio anulador de u.

- El operador diferencial

$$p(D) = [D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n. \tag{3.48}$$

donde α, β son números reales con $\beta \neq 0$, es anulador de las siguientes funciones

$$\begin{gathered} e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots, t^{n-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, \\ e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots, t^{n-1}e^{\alpha t}\sin\beta t. \end{gathered} \tag{3.49}$$

En efecto, el polinomio característico correspondiente a la ecuación $p(D)y = 0$ es

$$p(m) = [m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)]^n,$$

y como

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

tiene como raíces $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, se tiene que m_1 y m_2 con multiplicidad n son las únicas raíces del polinomio $p(m)$. Entonces la familia de funciones (3.49) son anuladas por el polinomio diferencial, y como antes forman una base de soluciones para la ecuación diferencial $p(D)u = 0$ correspondiente.

Ejemplo 3.17. *Encuentre un polinomio anulador de*

$$cos\beta t, \quad \sin\beta t, \quad \beta \neq 0$$

Solución. En ambos casos es $(D^2 + \beta^2)$.

Ejemplo 3.18. *Encuentre un polinomio anulador de*

$$t\cos\beta t, \quad t\sin\beta t.$$

Solución. $(D^2 + \beta^2)^2$.

Pasamos a continuación a describir el método de los coeficientes indeterminados.

Consideremos la ecuación a coeficientes constantes (3.43), que reescribimos como

$$p(D)y = g(t),$$

donde $p(D)$ esta definido en (3.42), es decir

$$p(D) = a_n D^n + \ldots + a_1 D + a_0.$$

La ecuación homogenea asociada de la ecuación (3.43) es

$$p(D)y = 0, \tag{3.50}$$

con polinomio caracteristico $p(m) = 0$. Supongamos que las raíces de este polinomio $m_1, \ldots, m_l$ son reales y tienen multiplicidad $k_1, \ldots, k_l$, respectivamente, de manera que

$$p(m) = a_n(m - m_1)^{k_1} \cdots (m - m_l)^{k_l}, \tag{3.51}$$

donde $k_1 + \cdots + k_l = n$. Entonces es fácil ver que $p(D)$ admite la factorización

$$p(D) = a_n(D - m_1 I)^{k_1} \cdots (D - m_l I)^{k_l}, \tag{3.52}$$

y viceversa si $p(D)$ se puede factorizar como en (3.52) entonces $p(m)$ se puede factorizar como en (3.51).

Supongamos ahora que el polinomio característico $p(m)$ de (3.50) contiene un par de raíces complejas conjugadas $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, entonces $p(m)$ contendrá el factor $m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)$. Si además estas raíces tienen multiplicidad k entonces $p(m)$ contendrá el factor $[m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)]^k$. En este caso el polinomio $p(D)$ contendrá el correspondiente factor $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)I]^k$ y viceversa.

Como el polinomio anulador $p(m)$ siempre se podrá factorizar en expresiones que contengan términos de la forma $(m - \alpha)^j$, $[m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)]^k$ (teorema fundamental del algebra) es claro que $p(D)$ se puede factorizar similarmente en factores de la forma $(D - \alpha)^j$, $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^k$.

De los argumentos anteriores es claro que si $g(t)$ es una de las siguientes funciones

(a) una constante k;

(b) un polinomio en t;

(c) una función exponencial $e^{\alpha t}$;

(d) una función trigonométrica de la forma $\sin \beta t$, o $\cos \beta t$;

(e) productos de estas funciones

(f) combinaciones lineales de estas funciones,

entonces es siempre posible encontrar un polinomio anulador $p(D)$ de esta función $g(t)$.

Supongamos que para la ecuación (3.43) conocemos un polinomio anulador $q(D)$ de la función g, y multipliquemos ambos mienbros de esta ecuación por $q(D)$, entonces

$$q(D)p(D)y = q(D)g = 0.$$

Así y (la solución general de ecuación (3.43)) es también solución de una ecuación homogenea a coeficientes constantes (de orden n_1 mayor que n). Poniendo $r(D) = q(D)p(D)$, esta ecuación se escribe

$$r(D)z = 0, \tag{3.53}$$

ecuación homogenea a coeficientes constantes que sabemos como resolver. En efecto tenemos que encontrar n_1 soluciones linealmente independientes de esta ecuación para formar una base B.

Sean $\{y_1, \cdots, y_n\}$ n soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.50), es decir que satisfacen, $p(D)y_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Entonces tambien se satisface que $r(D)y_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, es decir son n soluciones linealmente independientes de (3.53). Supongamos que $y_{n+1}, \dots, y_{n_1}$ son $n_1 - n$ soluciones adicionales de (3.53) tales que $\{y_1, \dots, y_{n_1}\}$ forman una base de soluciones de (3.53) (note $y_{n+1}, \dots, y_{n_1}$ no pueden ser soluciones de (3.50)).

Como $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, la solución general de (3.43) satisface la ecuación homogenea (3.53), se puede escribir como

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_1} c_i y_i(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) + \sum_{i=n}^{n_1} c_i y_i(t),$$

donde $c_1, \dots, c_{n_1}$ son constantes. Ya que $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t)$ forma parte de la solución general de (3.50), que llamamos antes y_h, se tiene entonces que $y_p(t) = y(t) - y_h(t)$ debe tener la forma

$$y_p(t) = \sum_{i=n}^{n_1} c_i y_i(t).$$

Esta expresión contiene $n_1 - n$ constantes indeterminadas las cuales se determinan reemplazando esta expresión en (3.43). De aquí el nombre del método de los coeficientes indeterminados.

3.6. Ejercicios Resueltos.

Ejercicio 3.1. *Considere la EDO de segundo orden lineal homogenea:*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

(a) Demuestre que el Wronskiano $W(t) = W(y_1, y)(t)$ de dos soluciones $y(t)$, $y_1(t)$ de la EDO satisface:

$$W(t) = Ce^{-\int p(t)dt}.$$

(b) Encuentre a continuación una expresión para $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y(t)}{y_1(t)}\right)$ en términos de $W(t)$ e $y_1(t)$. A partir de aquí y de (a) encuentre finalmente $y(t)$ en términos de $y_1(t)$.

(c) Ocupando la parte anterior, resuelva la siguiente EDO:

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0,$$

Indicación: $y(x) = -x$ *es solución de la EDO.*

Solución:

(a) Se sabe que $y(t), y_1(t)$ son soluciones de la EDO de segundo orden. Entonces se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

$$y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0$$

Al multiplicar la primera ecuación por y_1, la segunda por $y(t)$ y restarlas queda:

$$y''y_1 - y_1''y + p(t)(y'y_1 - y_1'y) = 0$$

Por otro lado el Wronskiano es igual a:

$$W(t) = W(y_1, y)(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = y'y_1 - y_1'y \Rightarrow W(t)' = y''y_1 - y_1''y.$$

Al reemplazar entonces $W(t)$ y $W'(t)$ resulta:

$$W(t)' + p(t)W(t) = 0$$

La cual es una EDO del tipo lineal homogenea de primer orden. La solución de esta EDO (variables separables):

$$W(t) = Ce^{-\int p(t)dt}.$$

(b) Directo de la parte anterior,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{y_1(t)}\right) = \frac{y'y_1 - yy_1'}{y_1^2} = \frac{W(y_1, y)}{y_1^2} = \frac{Ce^{-\int p(t)dt}}{y_1^2}$$

Integrando:

$$\frac{y(t)}{y_1(t)} = C\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2} + C_2$$

Finalmente se obtiene:

$$y(t) = C\, \overbrace{y_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}}^{y_2(t)} + C_2 y_1(t)$$

(c) Lo primero es normalizar la EDO:

$$y'' + \frac{2x}{(1-x^2)} y' - \frac{2}{(1-x^2)} y = 0$$

Tomando $y_1(x) = -x$, $p(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{2x}{(1-x^2)} dx = -ln(1-x^2)$

Reemplazando en el resultado de la parte (b):

$$y(x) = Cx \int \frac{e^{ln(1-x^2)}}{(-x)^2} dx + C_2 x = Cx \int \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) dx + C_2 x = Cx(-x^{-1} - x) + C_2 x$$

Finalmente:

$$y(x) = C(-1 - x^2) + C_2 x.$$

Ejercicio 3.2. *Sea* Ψ *una función definida en* $\Re$ *con* Ψ' *continua en* $\Re$. *Si* $\Psi(0) = 1$ *y* $\Psi'(0) = 0$, *se pide encontrar* Ψ *que satisface las siguientes ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{cases} \Psi'' + M(1-R)\Psi = 0 & para\ x \leq 0 \\ \Psi'' - MR\Psi = 0 & para\ 0 < x \leq 1 \\ \Psi'' + M(1-R)\Psi = 0 & para\ 1 < x \end{cases}$$

Donde $0 < R < 1$ *y* $M > 0$ *son constantes.*

Solución:

Cuando $x \in (-\infty, 0]$, $\Psi_1(x) = c_1 cos(\sqrt{M(1-R)}x) + c_2 sin(\sqrt{M(1-R)}x)$.

Cuando $x \in (0, 1]$, $\Psi_2(x) = c_3 e^{\sqrt{MR}x} + c_4 e^{-\sqrt{MR}x}$.

Cuando $x \in (1, \infty)$, $\Psi_3(x) = c_5 cos(\sqrt{M(1-R)}x) + c_6 sin(\sqrt{M(1-R)}x)$.

Las derivadas de estas funciones son:

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\Psi_1(x)' = \sqrt{M(1-R)}(-c_1 sin(\sqrt{M(1-R)}x) + c_2 cos(\sqrt{M(1-R)}x))$$

$$\Psi_2(x)' = \sqrt{MR}(c_3 e^{\sqrt{MR}x} - c_4 e^{-\sqrt{MR}x})$$

$$\Psi_3(x)' = \sqrt{M(1-R)}(-c_5 sin(\sqrt{M(1-R)}x) + c_6 cos(\sqrt{M(1-R)}x))$$

Se aplica ahora las condiciones iniciales:
$\Psi_1(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$
$\Psi_1'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$\Rightarrow \Psi_1(x) = cos(\sqrt{M(1-R)}x)$$

Ahora se aplican condiciones de continuidad y diferenciabilidad:
$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = 1 \Rightarrow c_3 + c_4 = 1$
$\Psi_1'(0) = \Psi_2'(0) = 0 \Rightarrow c_3 - c_4 = 0$

$$\Rightarrow \Psi_2(x) = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{MR}x} + e^{-\sqrt{MR}x}) = cosh(\sqrt{MR}x)$$

$\Psi_3(1) = \Psi_2(1) \Rightarrow c_5 cos(\sqrt{M(1-R)}) + c_6 sin(\sqrt{M(1-R)}) = cosh(\sqrt{MR})$
$\Psi_3'(1) = \Psi_2'(1) \Rightarrow \sqrt{M(1-R)}(-c_5 sin(\sqrt{M(1-R)}) + c_6 cos(\sqrt{M(1-R)})) = \sqrt{MR} senh(\sqrt{MR})$

De donde se obtiene:

$$\Psi_3(x) = c_5 cos(\sqrt{M(1-R)}x) + c_6 sin(\sqrt{M(1-R)}x)$$

con:

$$c_5 = cosh(\sqrt{MR}) cos^2(\sqrt{M(1-R)}) - \frac{\sqrt{MR}}{2\sqrt{M(1-R)}} senh(\sqrt{MR}) sen(2\sqrt{M(1-R)})$$

$$c_6 = cosh(\sqrt{MR}) sen(\sqrt{M(1-R)}) + \frac{\sqrt{MR}}{\sqrt{M(1-R)}} senh(\sqrt{MR}) cos(\sqrt{M(1-R)})$$

Ejercicio 3.3. *Encuentre la solución de la ecuación:*

$$a^7 y^{vii} + a^6 y^{vi} + a^5 y^{v} + a^4 y^{iv} + a^3 y''' + a^2 y' + ay' + y = 0$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y(0)' = \frac{\sqrt{2}}{2a}$ *y la condición de estabilidad:* $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, $a < 0$.

Solución:

Sea $y(t) = e^{mt}$, entonces:

$$a^7m^7 + a^6m^6 + a^5m^5 + a^4m^4 + a^3m^3 + a^2m^2 + am + 1 = 0$$

Aplicando la sumatoria geométrica:

$$\sum_{i=0}^{n} p^i = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p}$$

con $p = am$, $n = 7$, se tiene:

$$\sum_{i=0}^{7} (am)^i = \frac{1 - (am)^8}{1 - (am)} = \frac{[(am)^4 + 1][(am)^2 + 1][(am) + 1][(am) - 1]}{[(am) - 1]}$$

Se analiza cada factor para encontrar las raíces de la ecuación.

$$(am)^4 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^4 = -\tfrac{1}{a^4} = \tfrac{1}{a^4}e^{i\pi}$$

$\Rightarrow$ Calculando las raíces cuartas de la ecuación se tienen las cuatro soluciones complejas:

$$m_1 = \tfrac{1}{|a|}e^{\frac{\pi}{4}i} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = \tfrac{1}{a}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$m_2 = -\tfrac{1}{|a|}e^{\frac{\pi}{4}i} \quad \Leftrightarrow \quad m_2 = -\tfrac{1}{a}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$m_3 = \tfrac{1}{|a|}e^{-\frac{\pi}{4}i} \quad \Leftrightarrow \quad m_3 = \tfrac{1}{a}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$m_4 = -\tfrac{1}{|a|}e^{-\frac{\pi}{4}i} \quad \Leftrightarrow \quad m_4 = -\tfrac{1}{a}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

Para el factor $(am)^2 + 1 = 0$ se obtienen las soluciones:

$$m_5 = \frac{1}{a}i, \qquad m_6 = -\frac{1}{a}i$$

Del factor $(am) + 1 = 0$ se obtiene:

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$m_7 = -\frac{1}{a}$$

Entonces la solución de la EDO es:

$$y(t) = e^{\frac{\sqrt{2}t}{2a}}\left[c_1 cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{2a}\right) + c_2 sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{2a}\right)\right] + e^{-\frac{\sqrt{2}t}{2a}}\left[c_3 cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{2a}\right) + c_4 sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{2a}\right)\right]$$

$$+c_5 cos\left(\frac{1}{a}t\right) + c_6 sin\left(\frac{1}{a}t\right) + c_7 e^{-\frac{1}{a}t}.$$

Ahora se aplican las condiciones del problema:

$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = 0$

$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1$

$y(0)' = \frac{\sqrt{2}}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad y(0)' = \frac{\sqrt{2}}{2a}(c_1 + c_2) = \frac{\sqrt{2}}{2a} \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$

Finalmente la solución del problema es:

$$y(t) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2a}t} cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2a}t\right).$$

Ejercicio 3.4. *Sea $\lambda > 0$ en el problema:*

$$y^{(iv)} - \lambda y = 0,$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Estudie si existen valores de λ para los cuales el problema tiene solución no trivial.

Solución:

El polinomio característico $p(m) = m^4 - \lambda$ se puede factorizar de la forma:

$$p(m) = (m^2 - \sqrt{\lambda})(m^2 + \sqrt{\lambda}) = (m - \sqrt[4]{\lambda})(m + \sqrt[4]{\lambda})(m^2 + \sqrt{\lambda}) = 0$$

Entonces la solución de la EDO es:

$$y(t) = c_1 e^{-\sqrt[4]{\lambda}t} + c_2 e^{\sqrt[4]{\lambda}t} + c_3 \cos(\sqrt[4]{\lambda}t) + c_4 \sin(\sqrt[4]{\lambda}t).$$

Las derivadas de $y(t)$ son:

$$y'(t) = \sqrt[4]{\lambda}(-c_1 e^{-\sqrt[4]{\lambda}t} + c_2 e^{\sqrt[4]{\lambda}t} - c_3 \sin(\sqrt[4]{\lambda}t) + c_4 \cos(\sqrt[4]{\lambda}t))$$

$$y''(t) = \sqrt{\lambda}(c_1 e^{-\sqrt[4]{\lambda}t} + c_2 e^{\sqrt[4]{\lambda}t} - c_3 \cos(\sqrt[4]{\lambda}t) - c_4 \sin(\sqrt[4]{\lambda}t))$$

Ahora se imponen las condiciones iniciales y condición terminal:

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow -c_1 + c_2 + c_4 = 0$$

$$y''(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 - c_3 = 0$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_1 e^{-\sqrt[4]{\lambda}} + c_2 e^{\sqrt[4]{\lambda}} + c_3 \cos(\sqrt[4]{\lambda}) + c_4 \sin(\sqrt[4]{\lambda}) = 0$$

De la primera y tercera ecuación $c_3 = 0$. Luego $c_1 = -c_2$, $c_4 = -2c_2$. Al reemplazar en la cuarta ecuación:

$$c_2(senh(\sqrt[4]{\lambda}) - sen(\sqrt[4]{\lambda})) = 0.$$

Como c_2 debe ser distinto de cero para no tener la solución trivial, se debe cumplir que:

$$senh(\sqrt[4]{\lambda}) = sen(\sqrt[4]{\lambda})$$

lo cual solo se cumple solamente para $\lambda = 0$.

Ejercicio 3.5. *Usando el método de variación de parámetros resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 4x^2$$

<u>Solución:</u>

En primer lugar se resuelve ecuación homogenea:

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 0$$

Se tantea soluciones del tipo: $y = x^\alpha$, $y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$

Reemplazando en la EDO se obtiene:

$$(\alpha(\alpha-1)+\alpha-4)x^{\alpha}=0$$

lo cual se cumple para los valores $\alpha_1=2$ y $\alpha_1=-2$, con lo que se llega a dos soluciones de la homogenea:

$$y_1(x)=x^2,\quad y_2(x)=x^{-2}.$$

A partir de estas dos soluciones se obtiene la solución homogenea que esta dada por:

$$y_h(x)=c_1x^2+c_2x^{-2}$$

Aplicando el método de variación de parámetros la solución particular está dada por:

$$y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$

$$W(y_1,y_2)=\left|\begin{array}{cc} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{array}\right|=-4x^{-1}$$

$$u_1(x)=\int\frac{4x^{-2}}{4x^{-1}}dx=\int x^{-1}dx=\ln(x)$$

$$u_2(x)=\int\frac{4x^2}{-4x^{-1}}dx=-\int xdx=\frac{-x^2}{2}$$

luego la solución de la particular es:

$$y_p(x)=x^2\ln(x)-\frac{-x^2}{2}x^{-2}=x^2\ln(x)+\frac{1}{2}$$

Se obtiene la solución general dada por $y_g=y_h+y_p$

$$y(x)=c_1x^2+c_2x^{-2}+x^2\ln x+\frac{1}{2}.$$

Ejercicio 3.6. *Usando el método de variación de parámetros resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

$$y'''+y'=\tan(t)$$

Solución:

En primer lugar se resuelve ecuación homogenea:

$$y''' + y' = 0$$

Disminuyendo el orden de la ecuación diferencial realizando el cambio de variable $y' = \Upsilon \rightarrow y''' = \Upsilon''$ la EDO se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Upsilon'' + \Upsilon = \tan(t).$$

Ahora resolvemos la homogenea:

$$\Upsilon'' + \Upsilon = 0$$

Se prueban soluciones del tipo: $\Upsilon(x) = e^{mt}$, $\rightarrow \Upsilon' = me^{mt}$, $\Upsilon'' = m^2e^{mt}$. Reemplazando en la EDO se obtiene:

$$(m^2 + 1)\Upsilon = 0$$

Del polinomio característico $p(m) = (m^2 + 1) = 0$, se obtienen las soluciones complejas $m_1 = i$ y $m_2 = -i$. Luego la solución de la ecuación homogenea es:

$$\Upsilon_h(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t).$$

Ahora se usa el método de variación de parámetros para obtener la solución particular:

$$\Upsilon_p(t) = u_1(t)\Upsilon_1(t) + u_2(t)\Upsilon_2(t)$$

$$W(\Upsilon_1, \Upsilon_2) = \begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$$

$u_1(t) = -\int \tan(t)\sin(t)dt = \sin(t) - \ln(\sec(t) + \tan(t))$

$u_2(t) = \int \cos(t)\tan(t)dt = -\cos(t)$

Entonces la solución particular es:

$$\Upsilon_p(t) = u_1 \cos(t) + u_2 \sin(t) = -\cos(t)\ln(\sec(t) + \tan(t)),$$

y la solución general:

$$\Upsilon(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) - \cos(t)\ln(\sec(t) + \tan(t)).$$

Se regresa a la variable inicial, integrando $\Upsilon(t)$:

$$y(t) = c_1 \int \cos(t)dt + c_2 \int \sin(t)dt + \int \Upsilon_p(t)dt + c_3$$

de donde se obtiene:

$$y(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + c_3 + \int \cos(t) \ln(\sec(t) + \tan(t))dt$$

Ejercicio 3.7. *Encuentre la homogenea y plantee la forma de la solución particular.*

$$y^{(iv)} + 4y'' + 16y = e^t \cdot \cos\sqrt{3}t$$

<u>Solución:</u>

El polinomio característico es:

$$p(m) = m^4 + 4m^2 + 16 = 0$$

$$m^2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3} \cdot i}{2} = -2 \pm 2\sqrt{3} \cdot i$$

$$m^2 = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} \cdot e^{\pm i \cdot arctg(\frac{-2}{2\sqrt{3}})} = 4 \cdot e^{\pm i \cdot 120^{o}}$$

Entonces las soluciones complejas son $m = \pm\sqrt{4} \cdot e^{\pm i \cdot \frac{120^{o}}{2}} = \pm 2 \cdot e^{\pm i \cdot 60^{o}}$. Ahora los complejos se deben escribir en la forma $a + ib$ para obtener su parte real e imaginaria:

$$m = \pm 2(cos60^{o} \pm i \cdot sen60^{o}) = \pm 2\left(0{,}5 \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$m_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3} \quad m_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

Entonces la solución homogenea es:

$$y_h(t) = e^t(C_1 \cdot cos\sqrt{3} \cdot t + C_2 \cdot sen\sqrt{3} \cdot t) + e^{-t}(C_3 \cdot cos\sqrt{3} \cdot t + C_4 \cdot sen\sqrt{3} \cdot t)$$

y la forma de la solución particular es:

$$y_p(t) = d_1 e^t cos\sqrt{3} \cdot t + d_2 e^t sen\sqrt{3} \cdot t$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Ejercicio 3.8. *Encuentre la homogenea y plantee la forma de la solución particular de la siguiente EDO:*

$$y'' + ky = e^{\sqrt{|k|}\cdot t}$$

Solución:

El polinomio característico es

$$p(m) = m^2 + k = 0.$$

Luego se tienen los siguientes casos:

Caso 1:

$$k > 0 \Rightarrow m = \pm i \cdot \sqrt{k} \Rightarrow y(t) = C_1 \cdot cos\sqrt{k} \cdot t + C_2 \cdot sen\sqrt{k} \cdot t + d \cdot e^{\sqrt{k}\cdot t}$$

Caso 2:

$$k = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow y(t) = C_1 + C_2 \cdot t + d \cdot e^{\sqrt{k}\cdot t}$$

Caso 3:

$$k < 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{-k} \Rightarrow y(t) = C_1 \cdot e^{\sqrt{-k}\cdot t} + C_2 \cdot e^{\sqrt{-k}\cdot t} + d \cdot t \cdot e^{\sqrt{-k}\cdot t}$$

Ejercicio 3.9. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

$$y^{(v)} + 8a^3 y'' = a + e^{at}\cos(at)$$

Solución:

En primer lugar se resuelve ecuación homogenea:

$$y^{(v)} + 8a^3 y'' = 0$$

El polinomio característico asociado resulta ser $p(m) = m^5 + 8a^3m^2$, cuyas raíces son:

$$m_1 = m_2 = 0, \quad m_3 = -2a, \quad m_4 = a + a\sqrt{3}i, \quad m_5 = a - a\sqrt{3}i$$

Entonces la base de la solución homogenea está dada por:

$$\{1, t, e^{-2at}, e^{at}\cos(a\sqrt{3}t), e^{at}\sin(a\sqrt{3}t)\}$$

Luego la solución homogenea de la ecuación es la combinación lineal de la base:

$$y_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2at} + c_4 e^{at}\cos(a\sqrt{3}t) + c_5 e^{at}\sin(a\sqrt{3}t).$$

Lo siguiente es encontrar la forma de la solución particular. El polinomio anulador de la función $f(t) = a + e^{at}\cos(at)$, es:

$$D(D^2 - 2aD + 2a^2 I).$$

Aplicándolo a la EDO, resulta la nueva homogenea:

$$D^2(D + 2aI)(D^2 - 2aD + 4a^2 I)D(D^2 - 2aD + 2a^2 I)y(t) = 0,$$

cuya solución es:

$$\begin{gathered} Y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2at} + c_4 e^{at}\cos(a\sqrt{3}t) \\ +c_5 e^{at}\sin(a\sqrt{3}t) + c_6 e^{at}\cos(at) + c_7 e^{at}\sin(at) + c_8 t^2 \end{gathered}$$

Al sacar de esta solución las pertenecientes a la homogenea, la forma de la solución particular es:

$$y_p(t) = c_6 e^{at}\cos(at) + c_7 e^{at}\sin(at) + c_8 t^2$$

donde c_6, c_7, c_8 son los coeficientes indeterminados. Se evalúa la solución particular en la EDO:

$$y_p''(t) = -2c_6 a^2 e^{at}\sin(at) + 2a^2 c_7 e^{at}\cos(at) + 2c_8$$

$${y_p}^{(5)}(t) = -4(c_6 + c_7)a^5 e^{at}\cos(at) + 4(c_6 - c_7)a^5 e^{at}\sin(at).$$

Al remplazar en la EDO, se obtienen los valores de las constantes c_6, c_7 y c_8:

$$c_6 = -\frac{1}{40a^5}, c_7 = \frac{3}{40a^5}, c_8 = \frac{1}{16a^2}$$

Finalmente la solución general de la EDO es:

$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2at} + c_4 e^{at}\cos(a\sqrt{3}t) + c_5 e^{at}\sin(a\sqrt{3}t).$$

$$-\frac{e^{at}\cos(at)}{40a^5} + \frac{3e^{at}\sin(at)}{40a^5} + \frac{1}{16a^2}t^2.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Ejercicio 3.10. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

$$y^{(iv)} - y = \exp(t) + \cos(t).$$

Solución:

En primer lugar se resuelve la ecuación homogenea:

$$y^{(iv)} - y = 0$$

El polinomio característico asociado resulta ser: $p(m) = m^4 - 1$,
cuyas raíces son:

$$m_1 = 1, m_2 = -1, m_3 = i, m_4 = -i.$$

Entonces la base de la solución homogenea está dada por:

$$\{e^t, e^{-t}, \cos(t), \sin(t)\}.$$

Luego la solución homogenea de la ecuación es:

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t).$$

Lo siguiente es encontrar la forma de la solución particular. Para esto se debe encontrar el polinomio anulador de la función $f(t) = \exp(t) + \cos(t)$, el cual es: $(D - I)(D^2 + I)$. Al aplicar el anulador a la ecuación se obtiene:

$$(D - I)(D^2 + I)(D^4 - I)y(t) = 0.$$

luego se resuelve

$$p(D) = (D - I)(D^2 + I)(D^4 - I)y(t) = 0$$

con lo que se obtiene:

$$Y_p(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t) + c_5 t e^t + c_6 t \cos(t) + c_7 t \sin(t)$$

Quitando las soluciones de la homogenea, la forma de la solución particular es:

$$y_p(t) = c_5 t e^t + c_6 t \cos(t) + c_7 t \sin(t).$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Para determinar los coeficientes indeterminados se evalúa en la EDO la solución particular. Se necesita la cuarta derivada de y_p que es:

$$y_p^{(4)} = 4c_5e^t + c_5te^t + 4c_6\sin(t) - c_6t\cos(t) + c_7t\sin(t).$$

Reemplazando en la EDO se obtienen los valores de las coeficientes indeterminados.

$$c_5 = \frac{1}{4}, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = -\frac{1}{4}.$$

Luego, la solución particular de la EDO es:

$$y_p(t) = \frac{1}{4}te^t - \frac{1}{4}t\sin(t),$$

y finalmente la solución general del problema es:

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos(t) + c_4\sin(t) + \frac{1}{4}te^t - \frac{1}{4}t\sin(t).$$

Ejercicio 3.11. *Usando el método de coeficientes inderminados resuelva la siguiente ecuación diferencial, analizando los posibles valores que puede tomar la constante w.*

$$z'' + wz = t\cos(\sqrt{w}t).$$

Solución:

Existen tres posibles casos a estudiar

Caso 1. Si $w > 0$ entonces $z_h(t) = c_1\cos(\sqrt{w}t) + c_2\sin(\sqrt{w}t)$.

Caso 2. Si $w = 0$ entonces $z_h(t) = c_1 + c_2t$.

Caso 3. Si $w < 0$ entonces $z_h(t) = c_1e^{\sqrt{w}t} + c_2e^{-\sqrt{w}t}$, pero este caso es infactible puesto que $t\cos(\sqrt{w}t)$ sería complejo.

Solución Caso 1:

$$(D^2 + w)z = t\cos(\sqrt{w}t)$$

el anulador de la función $g(t) = t\cos(\sqrt{w}t)$ es $(D^2 + w)^2$. Entonces:

$$(D^2 + w)^3z = 0.$$

Las raíces del polinomio característico $p(m) = (m^2 + w)^3$ son $m_1 = i\sqrt{w}$ con multiplicidad tres y $m_2 = -i\sqrt{w}$ con multiplicidad tres. Luego la solución particular está dada por:

$$z_p(t) = \cos(\sqrt{w}t)(c_1 + c_2t + c_3t^2) + \sin(\sqrt{w}t)(c_4 + c_5t + c_6t^2).$$

Sacando las soluciones que ya estan en la solución homogenea, la solución particular se reduce a:

$$z_p(t) = \cos(\sqrt{w}t)(c_2t + c_3t^2) + \sin(\sqrt{w}t)(c_5t + c_6t^2).$$

Ahora se obtiene $z_p''(t)$ para luego reemplazar en la EDO y así calcular los coeficientes indeterminados:

$$z_p(t)'' = (2c_2 + 2c_5\sqrt{w} + 4c_6\sqrt{w}t - c_2wt - c_3wt^2)\cos(\sqrt{w}t)$$

$$+(-2c_2\sqrt{w} + 2c_6 - 4c_3\sqrt{w}t + c_5wt - c_6wt^2)\sin(\sqrt{w}t)$$

Entonces al reemplazar $z_p(t)''$ y $z_p(t)$ en la EDO:

$$z_p(t)''+wz_p(t) = (2c_2+2c_5\sqrt{w}+4c_6\sqrt{w}t)\cos(\sqrt{w}t)+(-2c_2\sqrt{w}+2c_6-4c_3\sqrt{w}t)\sin(\sqrt{w}t)$$

$$z_p(t)'' + wz_p(t) = t\cos(\sqrt{w}t)$$

igualando los coeficientes respectivos se llega al sistema:

$$2c_3 + 2c_5\sqrt{w} = 0,\ -2c_2\sqrt{w} + 2c_6 = 0,\ 4c_6\sqrt{w} = 1,\ -4c_3\sqrt{w} = 0,$$

cuya solución es $c_2 = \frac{1}{4w}, \quad c_3 = 0, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = \frac{1}{4\sqrt{w}}.$

Entonces la solución general del caso $w > 0$ es :

$$z(t) = c_1\cos(\sqrt{w}t) + c_2\sin(\sqrt{w}t) + \frac{1}{4w}t\cos(\sqrt{w}t) + \frac{1}{4\sqrt{w}}t^2\sin(\sqrt{w}t).$$

Solución caso 2:

La ecuación con $w = 0$ es:

$$z(t)'' = t$$

Integrando dos veces $z(t)''$ se obtiene la solución general

$$z(t)' = \frac{t^2}{2} + c_1$$

$$z(t) = \frac{t^3}{6} + c_1 t + c_2.$$

Ejercicio 3.12. *Encuentre la solución de la ecuación*

$$\sin(x)^2 y'' - 3\sin(x)\cos(x)y' + (1 + 2\cos(x)^2)y = 3\cos(x).$$

Solución:

En primer lugar resolvemos la ecuación homogenea:

$$\sin(x)^2 y'' - 3\sin(x)\cos(x)y' + (1 + 2\cos(x)^2)y = 0$$

Se prueba con una función trigonométrica,

$$y_h(x) = \cos(x) \Rightarrow y_h(x)' = -\sin(x),\ y_h(x)'' = -\cos(x)$$

Se reemplaza en la ecuación:

$$-\sin(x)^2\cos(x) + 3\sin(x)^2\cos(x) + \cos(x) + 2\cos(x)^3 = 0,$$

$$2\cos(x)(\sin(x)^2 + \cos(x)^2) + \cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\cos(x) = 0,$$

luego $y(t) = \cos(x)$ no es base de la solución homogenea, pero es solución de la particular. Entonces $y_p(x) = \cos(x)$.

Se intenta ahora con $y_h(x) = \sin(x)$, $y_h(x)' = \cos(x)$, $y_h(x)'' = -\sin(x)$. Se reemplaza en la EDO:

$$-\sin(x)^3 - 3\sin(x)\cos(x)^2 + \sin(x) + 2\cos(x)^2\sin x = 0$$

$$-\sin(x)^3 - \sin(x)\cos^2 + \sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\sin(x)[\sin(x)^2 + \cos(x)^2] + \sin(x) = 0$$

y entonces $y_1(x) = \sin(x)$ es solución de la homogenea. Para obtener $y_2(x)$ se aplica la fórmula de Abel:

$$y(x)'' - 3\frac{\cos(x)}{\sin(x)}y(x)' + \left\{\frac{1}{\sin(x)^2} + 2\frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2}\right\} y(x) = 0$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$\Rightarrow \quad y_2(x) = \sin(x) \int \frac{1}{\sin(x)^2} e^{3\int \cot(x)dx} dx$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln(u) = \ln[\sin(x)]$$

$$u = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad du = \cos(x)dx$$

$$y_2(x) = \sin(x) \int \frac{1}{\sin(x)^2} e^{3\ln[\sin(x)]} dx = \sin(x) \int \frac{\sin(x)^3}{\sin(x)^2} dx = \sin \int \sin(x) dx$$

$$y_2(x) = -\sin(x)\cos(x).$$

La solución general de la EDO es:

$$y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(x)\cos(x) + \cos(x).$$

Ejercicio 3.13. *Resuelva la siguiente EDO:*

$$a(t)y'' + b(t)y' + y = c(t)^3 + e^{3c(t)} + \cos(c(t))$$

donde las funciones $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ son:

$$a(t) = (1+t^2)^2, \quad b(t) = 2t(1+t^2), \quad c(t) = \operatorname{arc\,tg}(t).$$

Solución:

Se realiza el cambio de variable $u = \operatorname{arc\,tg}(t) \Rightarrow du = \frac{1}{1+t^2} dt$. Las derivadas quedan:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{1}{1+t^2} = \bar{y}' \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(\frac{dy}{du}\frac{1}{1+t^2})}{dt} = \frac{1}{(1+t^2)^2}\left(\frac{d^2y}{du^2} - 2t\frac{dy}{du}\right) = \frac{1}{(1+t^2)^2}(\bar{y}'' - 2t\bar{y})$$

Al reemplazar en la EDO este cambio de variable, resulta:

$$\bar{y}'' + \bar{y} = u^3 + e^{3u} + \cos(u).$$

La solución homogenea de la EDO es:

$$\bar{y}_h(u) = c_1 \cos(u) + c_2 \operatorname{sen}(u).$$

Aplicando el método de coeficientes indeterminados, la forma que tiene la solución particular es:

$$\bar{y}_p(u) = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Ee^{3u} + Fu\cos(u) + Gu\,\mathrm{sen}(u)$$

Derivando:

$$\bar{y}_p(u)' = B + 2Cu + 3Du^2 + 3Ee^{3u} + F\cos(u) + G\,\mathrm{sen}(u) + u(-F\,\mathrm{sen}(u) + G\cos(u))$$

$$\bar{y}_p(u)'' = 2C + 6Du + 9Ee^{3u} - 2F\,\mathrm{sen}(u) + 2G\cos(u) + u(-F\,\mathrm{sen}(u) - G\cos(u))$$

Al reemplazar la solución particular en la EDO resulta:

$$\bar{y}_p'' + \bar{y}_p = A + 2C + (B + 6D)u + Cu^2 + Du^3 + 10Ee^{3u} - 2F\,\mathrm{sen}(u) + 2G\cos(u)$$

$$= u^3 + e^{3u} + \cos(u).$$

Para que ambas funciones sean iguales, debe cumplirse que los coeficientes sean iguales:

$C = 0$, $D = 1$, $A + 2C = 0 \Rightarrow A = 0$, $B + 6D = 0 \Rightarrow B = -6$, $10E = 1 \Rightarrow E = \frac{1}{10}$, $2G = 1 \Rightarrow G = \frac{1}{2}$ y $-2F = 0 \Rightarrow F = 0$.

Entonces la solución particular es:

$$\bar{y}_p(u) = -6u + u^3 + \frac{1}{10}e^{3u} + \frac{1}{2}u\,\mathrm{sen}(u).$$

Por lo tanto la solución general es:

$$\bar{y}(u) = \bar{y}_h(u) + \bar{y}_p(u) = c_1\cos(u) + c_2\,\mathrm{sen}(u) - 6u + u^3 + \frac{1}{10}e^{3u} + \frac{1}{2}u\,\mathrm{sen}(u).$$

Regresando a la variable inicial t,

$$\bar{y}(t) = c_1\cos(\mathrm{arc\,tg}(t)) + c_2\,\mathrm{sen}(\mathrm{arc\,tg}(t)) - 6\,\mathrm{arc\,tg}(t) + \mathrm{arc\,tg}(t)^3 + \frac{1}{10}e^{3\,\mathrm{arc\,tg}(t)}$$

$$+\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}(t)\,\mathrm{sen}(\mathrm{arc\,tg}(t)).$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Ejercicio 3.14. *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:*

(a) $y''' - y'' + 25y' - 25y = e^t + \operatorname{sen}(5t)$.

(b) $t^2y'' + (2a+1)ty' + a^2y = \ln(t)t^{-a}$, $t > 0$, *y donde* $a > 0$ *es una constante dada.*

Solución:

(a) Se resuelve la homogenea, encontrando las raíces del polinomio característico:

$$p(m) = m^3 - m^2 + 25m - 25 = m^2(m-1) + 25(m-1) = (m^2+25)(m-1) = 0$$

Entonces la solución homogenea es:

$$y_h(t) = c_1e^t + c_2\cos(5t) + c_3\operatorname{sen}(5t).$$

Aplicando el método de coeficientes indeterminados, la forma de la solución particular es:

$$y_p(t) = d_1te^t + d_2t\cos(5t) + d_3t\operatorname{sen}(5t).$$

Reemplazado la particular en la EDO resulta:

$$y_p''' - y_p'' + 25y_p' - 25y_p = 26d_1e^t + (-50d_2 - 10d_3)\cos(5t) + (-50d_3 + 10d_2)\operatorname{sen}(5t)$$

$$= e^t + \operatorname{sen}(5t).$$

Igualando los coeficientes de las funciones (para mantener la igualdad), se obtiene la solución particular:

$$y_p(t) = \frac{1}{26}te^t + \frac{1}{260}t\cos(5t) - \frac{1}{52}t\operatorname{sen}(5t).$$

Finalmente la solución general es la suma de la homogenea mas particular:

$$y(t) = c_1e^t + c_2\cos(5t) + c_3\operatorname{sen}(5t) + \frac{1}{26}te^t + \frac{1}{260}t\cos(5t) - \frac{1}{52}t\operatorname{sen}(5t).$$

(b) Se realiza el cambio de variable $u = \ln(t)$, $du = \frac{1}{t}dt$. Las derivadas quedan:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{1}{t} = \bar{y}'\frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(\frac{dy}{du}\frac{1}{t})}{dt} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}\right) = \frac{1}{t^2}(\bar{y}'' - \bar{y})$$

Al aplicar el cambio de variable:

$$\bar{y}'' + 2a\bar{y}' + a^2\bar{y} = ue^{-au}.$$

Se resuelve la homogenea, calculando las raíces del polinomio característico:

$$p(m) = m^2 + 2am + a^2 = (m+a)^2$$

Por lo tanto la solución homogenea es:

$$\bar{y}_h(u) = c_1e^{-au} + c_2ue^{-au}.$$

Aplicando el método de coeficientes indeterminados, la forma de la solución particular es:

$$\bar{y}_p(u) = e^{-au}(d_1u^2 + d_2u^3)$$

Al reemplazar la particular en la EDO, queda:

$$\bar{y}_p'' + 2a\bar{y}_p + a^2\bar{y}_p = e^{-au}(2d_1 + 6d_2u) = ue^{-au}$$

y por lo tanto la solución particular es:

$$\bar{y}_p = \frac{1}{6}u^3e^{-au}$$

Finalmente la solución general es la suma de la homogenea y particular:

$$\bar{y}(u) = c_1e^{-au} + c_2ue^{-au} + \frac{1}{6}u^3e^{-au}$$

Regresando a la variable inicial t, la solución de la EDO es:

$$y(t) = c_1t^{-a} + c_2\ln(t)t^{-a} + \frac{1}{6}(\ln(t))^3t^{-a}$$

Ejercicio 3.15. *Considere la ecuación diferencial:*

$$y''' + b(t)y = \operatorname{sen}(t),$$

con las condiciones iniciales

$$y(t_0) = c_1, \quad y'(t_0) = c_2, \quad y''(t_0) = c_3.$$

La función $b : I \to R$ es definida y continua en un intervalo I. Demuestre que el problema con condiciones iniciales tiene una única solución.

Solución:

Por contradicción. Supongo que existen dos soluciones al problema con condiciones iniciales y_1 e y_2. Ambas soluciones deben satisfacer la EDO y las condiciones iniciales.

Sea la variable $z = y_1 - y_2$. Esta variable cumple con la EDO:

$$z''' + b(t)z = 0$$

y las condiciones iniciales:

$$z(t_0) = 0, \quad z'(t_0) = 0, \quad z''(t_0) = 0.$$

Escribiendo la EDO en la forma de un sistema de EDOS de primer orden:

$$z' = u, \quad u' = v, \quad v' = -b(t)z$$

Se cumple para $t \geq t_0$:

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} u(s)ds, \quad u(t) = \int_{t_0}^{t} v(s)ds, \quad v(t) = \int_{t_0}^{t} -b(s)z(s)ds$$

Acotando:

$$|z(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |u(s)|ds, \quad |u(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |v(s)|ds, \quad |v(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |-b(s)z(s)|ds \leq C\int_{t_0}^{t} |z(s)|ds$$

C es el máximo de la función $b(t)$.

Sea $r(t) = |z(t)| + |v(t)| + |u(t)|$. Se cumple que:

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$0 \leq r(t) \leq \int_{t_0}^{t} |z(s)|ds + \int_{t_0}^{t} |v(s)|ds + \int_{t_0}^{t} |u(s)|ds$$

Entonces:

$$r(t) \leq C \left(\int_{t_0}^{t} (|u(s)| + |z(s)| + |v(s)|)ds \right) \leq C \int_{t_0}^{t} r(s)ds$$

Sea $\gamma(t) := \int_{t_0}^{t} r(s)ds$. Entonces:

$$r(t) = \gamma'(t) \leq C\gamma(t).$$

Multiplicando por e^{-Ct} (factor integrante), se puede escribir:

$$(\gamma(t)e^{-Ct})' \leq 0.$$

Integrando entre t_0 y t:

$$\gamma(t)e^{-Ct} \leq \gamma(t_0)e^{-Ct},$$

pero $\gamma(t_0) = 0$, entonces

$$\gamma(t) = 0 \Rightarrow r(t) = 0 \Rightarrow z(t) = y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Lo cual es una contradicción.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

3.7. Ejercicios Propuestos.

Propuesto 3.1. *Sea la ecuación diferencial homogénea:*

$$y''' + P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

donde suponemos que $P, Q, R : I \to R$ son tres funciones continuas definidas en un intervalo real I:

(a) Suponiendo que $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ forman una base de soluciones determine las funciones coeficientes P, Q, R en término de y_1, y_2, y_3.

(b) De los resultados de (a) determine la ecuación diferencial que tiene como base de soluciones a $y_1 = \sin(t), y_2 = \cos(t), y_3 = e^t$.

Soluciones:

$$(a) \quad \text{Se debe resolver:} \begin{bmatrix} y_1''' & y_1'' & y_1' \\ y_2''' & y_2'' & y_2' \\ y_3''' & y_3'' & y_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1''' \\ y_2''' \\ y_3''' \end{bmatrix}$$

(b) $P(x) = -1, \quad Q(x) = 1, \quad R(x) = -1.$

Propuesto 3.2. *Considere la ecuación en $m(*)$:*

$$m^2 + me^{\alpha t} + e^{2t} - 1 = 0, (*)$$

donde α y t son números reales.

(a) Demuestre que para $\alpha \neq 2$ no existe m real que satisface $(*)$ para todo t, pero que un tal m si existe $\alpha = 2$.

(b) Usando (a) encuentre α tal que la ecuación diferencial:

$$y''' + e^{\alpha t}y' + (e^{2t} - 1)y = 0$$

tenga una solución explícita.

(c) Complete entonces la base de soluciones y encuentre la solución general de la ecuación .

Soluciones:

(a) $m = -1,$

(b) $\alpha = 2, \quad y_1(t) = e^{-t},$

(c) $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-\left(t + \frac{1}{2}e^{2t}\right)}$

Propuesto 3.3. *(a) Sea $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una solución no trivial de la EDO:*

$$y'' - 2by' + cy = 0,$$

donde b y c son constantes. Si la solución es tal que $y(0) = y(1) = 0$, demuestre que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y(n) = 0.$$

(b) Sea $k \in \mathbb{N}$, encontrar los valores de c tal que la ecuación diferencial:

$$y'' - 2cy' + y = 0,$$

tiene una solución no trivial que satisface $y(0) = y(2\pi k) = 0$.

Soluciones:

(a) Se prueba que la solución tiene la forma $y(t) = c_2 \cdot e^{bt} \cdot \sin(K \cdot \pi \cdot t)$ con c_2 distinto de cero pues $y(t)$ es no trivial y luego se concluye lo pedido.

(b) Se llega a que $c = \pm\sqrt{1 - \dfrac{n^2}{4K^2}}, \quad n \in \mathbb{Z}$. Por ejemplo si $n = 2, K = 1$ entonces $c = 0$.

Propuesto 3.4. *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:*

(a) $\quad t^2x'' + tx' + x = t.$

(b) $\quad 4y'' - 4y' - y = \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1).$

(c) $\quad y'' + y = 4\cos x - \sin x.$

(d) $\quad y''' + \omega^2 y' = \cos(\varphi t) + \operatorname{sen}(\varphi t), \quad \omega \neq 0, \quad \varphi \neq 0.$

(e) $\quad x^4y'' + 2x^3y' + y = \tan\frac{1}{x}.$

Sugerencia: Haga $u = x^m$ con m adecuado.

(g) $\quad xy'' - 2(1 + 6x^3)y' + 36x^5y = 9x^8e^{2x^3}.$

Sugerencia: Haga $u = x^m$ con m adecuado.

Soluciones:

$$(a) \quad x(t) = c_1\cos(\ln(t)) + c_2\sin(\ln(t)) + \frac{t}{2}.$$

$$
\begin{array}{ll}
(b) & y(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 x e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x \arcsin x}{4} \right). \\
(c) & y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{1}{2} x(\sin(x) + \cos(x)). \\
(d) & (\omega \neq \varphi) \quad y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + c_3 + \dfrac{\cos(\varphi t) - \sin(\varphi t)}{\varphi(\varphi^2 - \omega^2)}. \\
 & (\omega = \varphi) \quad y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + c_3 + \frac{t}{\omega^2} \left(\sin(\omega t) - \frac{1}{2}\cos(\omega t) \right). \\
(e) & y(x) = c_1 \cos(x^{-1}) + c_2 \sin(x^{-1}) - \cos(x^{-1}) \ln \left(\dfrac{1 + \sin(x^{-1})}{\cos(x^{-1})} \right). \\
(f) & y(x) = c_1 e^{2x^3} + c_2 x^3 e^{2x^3} + \frac{1}{6} x^9 e^{2x^3}.
\end{array}
$$

Propuesto 3.5. *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogeneas:*

(a) $t^2 y'' - 7ty' + 16y = 0,$

(b) $t^2 y'' - ty' + 2y = 0.$

Soluciones:

$$
\begin{array}{ll}
(a) & y(t) = c_1 t^4 + c_2 t^4 \ln(t), \\
(b) & y(t) = c_1 t \cos(\ln(t)) + c_2 t \sin(\ln(t)).
\end{array}
$$

Propuesto 3.6. *Considere la ecuación diferencial:*

$$t^3 y''' + 3(a+1)t^2 y'' + (3a(a+1) - 3bc + 1)ty' + (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)y = 0,$$

donde a, b, c son parámetros constantes distintos y la variable t se interpreta como el tiempo.

(a) *Resuelva la ecuación en función de t, a, b y c tomando en cuenta que:*
(1) $m = -(a+b+c)$ *es solución de la ecuación cúbica:*

$$m^3 + 3am^2 + 3\left(a^2 - bc\right) m + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0,$$

(2) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right).$

(b) *Si $b = c = -\mu < 0$, determine la solución en términos de t, a y μ.*

(c) *Si $2\mu - a > 0$, $a > 0$ y $b = c = -\mu < 0$. Determine la solución $y(t)$ que satisface $y(1) = \dfrac{1}{a+\mu}$, $y'(1) = 0$ y tal que $y(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito.*

Soluciones:

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$(a)\quad y(t) = C_1 \cdot t^{-(a+b+c)} + t^{\frac{-2a+b+c}{2}} \left(C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}(b-c)}{2} \cdot \ln|t|\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}(b-c)}{2} \cdot \ln|t|\right)\right).$$

$$(b)\quad y(t) = C_1 \cdot t^{-a+2\mu)} + t^{-a-\mu}\left[C_2 + C_3 \ln(t)\right].$$

$$(c)\quad y(t) = t^{-(a+\mu)} \cdot \left[\frac{1}{a+\mu} + \ln(t)\right].$$

Propuesto 3.7. *Resuelva las ecuaciones:*

(a) $\quad y'' + \omega^2 y = \sin\gamma t, \quad \omega \neq \gamma \neq 0.$

(b) $\quad 2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2.$

Soluciones:

$$(a)\quad y(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\sin\gamma t}{(\omega-\gamma)(\omega+\gamma)},$$

$$(b)\quad y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{\frac{1}{2}x} + \tfrac{1}{9}xe^{2x} - \tfrac{1}{20}e^{-2x} + 1.$$

Propuesto 3.8. *Determine la forma de una solución particular (en función de coeficientes indeterminados) para la ecuación:*

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t),$$

donde $a_n \neq 0, \ldots, a_0$ *son constantes, para los siguientes casos:*

(a) $g(t) = e^t$, *y se sabe que* $m = 1$ *es una raíz de multiplicidad, exactamente igual a 5, del polinomio característico de la ecuación homogénea asociada.*

(b) $g(t) = \cos t$, *y se sabe que una raíz del polinomio característico de la ecuación homogénea asociada es* $m = i$ *con multiplicidad exactamente igual a 3.*

Soluciones:

$(a)\quad y_p(t) = d_1 t^5 e^t,$
$(b)\quad y_p(t) = d_1 t^3 \cos t + d_2 t^3 \sin t.$

Propuesto 3.9. *Resuelva las ecuaciones:*
(a) $\quad y'' - 2y' + y = e^t,$
(b) $\quad y''' - ky'' = e^{kt}.$

(c) $y''' - ky'' = e^{-kt}$ *donde k es un número positivo.*

Soluciones:

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad y(t) = C_1e^t + C_2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t,\\
&(b) \quad y(t) = C_1 + C_2t + C_3e^{kt} + \frac{te^{kt}}{k^2},\\
&(c) \quad y(t) = C_1 + C_2t + C_3e^{kt} + \frac{te^{-kt}}{k^2}.
\end{aligned}
$$

Propuesto 3.10. *Considere la ecuación diferencial de orden n:*

$$P(D)y = a_ny^n + \ldots + a_1y' + a_oy = g(t)$$

donde $g(t) = a \cdot \cos(\beta \cdot t) + b \cdot \sin(\beta \cdot t), \beta \neq 0$. *Encuentre la forma de la solución particular de la ecuación diferencial.*
Sugerencia: considere primero el caso en que el anulador de g no es factor de $P(D)$.

Soluciones:

Caso 1 no es factor: $y_p(t) = d_1\cos(\beta t) + d_2\sin(\beta t)$,

Caso 2 es factor: $y_p(t) = d_1t^l\cos(\beta t) + d_2t^l\sin(\beta t)$, donde l es la multiplicidad de la raíz compleja $i\beta$.

Propuesto 3.11. *Encuentre la solución general de:*
(a) $y'' - 3y' + 4y = te^{2t} - \sin(t)$,
(b) $y^{iv} + 8y'' + 16y = \cos^2 t$.

Soluciones:

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3te^{2t} - \frac{1}{42}t^2e^{2t} + \frac{1}{21}t^3e^{2t} - \frac{1}{50}\cos t - \frac{7}{50}\sin t,\\
&(b) \quad y(t) = (C_1 + C_2t)\sin 2t + (C_3 + C_4t)\cos 2t - \frac{1}{64}t^2\cos 2t + \frac{1}{32}.
\end{aligned}
$$

Propuesto 3.12. *Considere la ecuación diferencial de orden n:*

$$P(D)y = a_ny^n + \ldots + a_1y' + a_oy = g(t)$$

donde $a_i, i = 0, \ldots, n$ *son constantes con* $a_n \neq 0$. *Suponga que*

$$g(t) = t^{2ab-1}e^{abt}\,(a\cos bt + b\sin at)$$

con a y b enteros positivos.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Encuentre la forma de la solución particular considerando separadamente el caso en que el anulador de $g(t)$ no es un factor de $P(D)$ y el caso en que si lo es y con multiplicidades.

Soluciones:

Caso 1: Anulador no es factor de $P(D)$:

$$y_p(t) = e^{abt} \cdot t^{2ab-1} \cdot [\cos(bt)p_1(t) + \sin(bt)p_2(t) + \cos(at)p_3(t) + \sin(at)p_4(t)],$$

Caso 2: Anulador es factor de $P(D)$:

$$y_p(t) = e^{abt} \cdot t^{2ab-1} \cdot \left[(\cos(bt)p_1(t) + \sin(bt)p_2(t))\, t^l + (\cos(at)p_3(t) + \sin(at)p_4(t))\, t^m\right]$$

l y m según multiplicidad. En ambos casos $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ son polinomios de grado $2ab - 1$ (con coeficientes indeterminados).

Propuesto 3.13. *Use el método de los coeficientes indeterminados para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales*

(a) $\quad y^{iv} - y''' = x + e^x$, *con* $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

(b) $\quad t^3y''' + 3t^2y'' + (1 - 3\alpha\beta)\, ty' + (\alpha^3 + \beta^3)\, y = t^{-(\alpha+\beta)} + \ln t^{\alpha+\beta}$

sabiendo que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab)$.

Soluciones:

$(a) \quad y(x) = 2 + x - 2e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + xe^x,$

$(b) \quad y(t) = C_1t^{-(\alpha+\beta)} + t^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \left(C_2 \cos\left(\frac{(\alpha+\beta)\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + C_3 \sin\left(\frac{(\alpha+\beta)\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)\right) + \frac{3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha^3+\beta^3)^2} + \frac{\ln(t)}{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2} + \frac{t^{-(\alpha+\beta)}\ln(t)}{3\,(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}.$

Propuesto 3.14. *Resuelva*
(a) $y'' + 4y = \sin^2 x$

(b)Encuentre la forma de la solución particular para la ecuación:

$$(D - I)^3 \left(D^2 - 4I\right) y = xe^x + e^{2x} + e^{-2x}.$$

Soluciones:

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$(a)\quad y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \dfrac{1}{8}\left(1 - x\sin 2x\right),$

$(b)\quad y_p(x) = d_1x^3e^x + d_2x^4e^x + d_3xe^{2x} + d_4xe^{-2x}.$

Propuesto 3.15. *Resuelva la ecuación diferencial:*

$$(1+t^2)y'' + 4ty' + (2+\omega(1+t^2))y = t\cos(\sqrt{\omega}\cdot t)$$

Indicación: Aplique el cambio de variable $z(t) = (1+h(t))y(t)$ para algún $h(t)$.

Solución:

$h(t) = t^2$, $y(t) = \dfrac{1}{1+t^2}\left(C_1\cos(\sqrt{\omega}t) + C_2\sin(\sqrt{\omega}t)\right) + y_p(t).$

Propuesto 3.16. *Resuelva la ecuación diferencial:*

$$t^2y'' - 3ty' + 4y = \left(\frac{1+\ln(t)+2(\ln(t))^3}{1+2(\ln(t))^2}\right)\cdot t^2$$

Solución:

Con el cambio de variable $u = \ln(t)$ se llegará a la EDO

$$\overline{y}'' - 4\overline{y}' + 4\overline{y} = ue^{2u} + \frac{e^{2u}}{1+2u^2},$$

que se resuelve con variación de parámetros y el resultado final es:

$$y(t) = t^2\left(c_1 + c_2\ln(t) - \frac{1}{4}(2\ln(t)^2 + \ln(1+2\ln(t)^2)) + \frac{1}{2}\ln(t)(\ln(t)^2 + \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\ln(t)))\right)$$

Propuesto 3.17. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}.$$

Sugerencia: Haga el cambio de variable $z = xy$.

Solución:

$y(t) = \dfrac{1}{x}\left[C_1\cos x + C_2\sin x + 1\right].$

Propuesto 3.18. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

$$y'' - 4y' + 4y = \left(e^{2t}+1\right)(\cos(t)+1)$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Solución:

$$y(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + \frac{1}{2}t^2e^{2t} + \frac{3}{25}\cos t - \frac{4}{25}\sin t - e^{2t}\cos t + \frac{1}{4}.$$

Propuesto 3.19. *Considere la ecuación diferencial:*

$$t^2y'' + ty' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)y = t^{\frac{3}{2}}, t > 0.$$

(a) Demuestre que $y_1(t) = t^{-\frac{1}{2}}\cos t$ *es una solución de la ecuación homogénea correspondiente.*
(b)Encuentre otra solución l.i. con y_1*.*
(c)Encuentre la solución general.

Soluciones:

(a) Basta con reemplazar en la homogenea.
(b) $y_2(t) = t^{-\frac{1}{2}}\sin t,$
(c) $y(t) = t^{-\frac{1}{2}}(c_1\cos t + c_2\sin t) + t^{\frac{3}{2}} - 2t^{-\frac{1}{2}}.$

Propuesto 3.20. *Considere la ecuación diferencial:*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \quad (1)$$

donde $p(t), q(t),$ *y* $f(t)$ *son funciones definidas en* R *continuas.*
(a) Suponiendo que $y_1(t), y_2(t)$ *son dos soluciones l.i. de la ecuación homogénea asociada demuestre que la solución general de (1) se puede escribir de la forma*

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \int_0^t G(t,s)f(s)ds$$

donde se pide determinar esta función G*.*

(b)Evalúe a partir de (a) la solución general de la ecuación $y'' + k^2y = f(t)$*,* $k > 0$*.*

Soluciones:

(a) $G(t,s) = \dfrac{y_2(t)y_1(s) - y_1(t)y_2(s)}{W(y_1,y_2)(s)},$

(b) $y(t) = c_1\cos(kt) + c_2\sin(kt) + \int_0^t f(s)\sin(k(t-s))ds$

Propuesto 3.21. *Considere la ecuación diferencial:*

$$xy'' + \left(4x^2 - 1\right)y' + 4x^3y = x^3e^{x-x^2}, \quad x > 0.$$

(a)Encuentre la solución de la ecuación homogénea correspondiente. Hint: Reduzca esta ecuación a una de coeficientes constantes mediante un cambio de la forma $t = x^{\alpha}$, para un cierto α.
(b)Encuentre la solución general usando variación de parámetros.

Soluciones:

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad y_h(x) = e^{-x^2}(c_1 + c_2 x^2),\\
&(b)\quad y(x) = e^{-x^2}(c_1 + c_2 x^2) + \frac{1}{2} e^{x-x^2}\left(3x^2 - 6x + 5\right).
\end{aligned}
$$

Propuesto 3.22. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

$$y'' + \frac{t}{1-t} y' - \frac{1}{1-t} y = 1 - t.$$

Solución:

$y(t) = c_1 e^t + c_2 t + 1 + t^2.$

Propuesto 3.23. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:*

(a) $\quad (t^2 - 1)\, y'' - 2ty' + 2y = t^2 - 1.$

(b) $\quad ty'' + (2t + 3)y' + (t + 3)y = ae^{-t}, \quad t > 0.$

Soluciones:

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad y(t) = C_1 t + C_2\,(t^2 + 1) + t\left(\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) - t\right) + \frac{1}{2}\left(t^2 + 1\right)\ln\left(t^2 - 1\right)\\
&(b)\quad y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 \frac{e^{-t}}{t^2} + \frac{a}{3} t e^{-t}.
\end{aligned}
$$

Propuesto 3.24. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:*

(a) $\quad y''' + 2y'' + 2y' = e^{-t}(\cos t + 2 \operatorname{sen} t).$

(b) $\quad y''' + \frac{1}{4t^2} y' = t^{-\frac{1}{2}}, \quad t > 0.$

Soluciones:

(a) $y(t) = c_1 + e^{-t}(c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t)) + e^{-t}(\frac{1}{4} t \cos(t) - \frac{3}{4} t \sin(t)).$
(b) $y(t) = d_1 t^{\frac{3}{2}} + d_2 t^{\frac{3}{2}} \ln(t) + d_3 + t^{\frac{5}{2}}\left(\frac{4}{5}\ln(t) - \frac{18}{25}\right).$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

4. Transformada de Laplace

Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, decimos que f es continua a trozos (continua por tramos) en $[0,\infty)$, si en cualquier intervalo $[a,b] \subset [0,\infty)$ hay a lo más un número finito de puntos de discontinuidades $t_1,\ldots,t_l$ de salto finito, esto significa que f es continua en cada intervalo (t_k,t_{k+1}), y $f(t)$, $t \in (t_k,t_{k+1})$, tiende a un limite finito cuando t tiende a t_k o t_{k+1}, para todo $k = 1,..,l-1$.

Definición 4.1. *Decimos que una función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es de orden exponencial si existen constantes $C > 0$, $M > 0$ y $T > 0$ tales que:*

$$|f(t)| \leq Me^{Ct} \quad \textit{para todo} \quad t \geq T$$

Ejemplo 4.1. *(1) Para $f(t) = t$, $t \geq 0$, se tiene $|f(t)| = t \leq e^t$, por lo tanto es de orden exponencial con $M = 1, C = 1$ y T cualquier número positivo.*

(2) Para $f(t) = \cos t$, $t \geq 0$, se tiene $|f(t)| = |\cos t| \leq e^t$, por lo tanto es de orden exponencial con $M = 1, C = 1$ y T cualquier número positivo.

(3) Para $f(t) = t^n \sin t$, $t \geq 0$, se tiene $|f(t)| \leq t^n \leq (e^t)^n = e^{nt}$, por lo tanto es de orden exponencial con $M = 1, C = n$ y T cualquier número positivo.

Comencemos a continuación con la definición de la Transformada de Laplace.

Sea $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ y consideremos la expresión,

$$\int_0^\tau e^{-st} f(t)dt$$

donde $s > 0$ y $\tau > 0$. Supongamos que

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

existe, entonces

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

la llamaremos la transformada de Laplace de f. Es costumbre también denotar la transformada de Laplace por $\mathcal{L}(f(t))$. Así,

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Notamos que el dominio de definición de esta transformada depende de la función f. En este respecto se tiene

Teorema 4.1. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua por trozos y de orden exponencial, i.e. existen constantes $M > 0$, $C > 0$ y $T > 0$ tales que*

$$|f(t)| \leq Me^{Ct} \quad \textit{para todo} \quad t \geq T,$$

entonces $F(s)$ existe para todo $s > C$.

Demostración 1. Se tiene

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \lim_{\tau\to\infty} \int_T^\tau e^{-st} f(t)dt \end{aligned}$$

Ahora, de los cursos de cálculo se sabe que

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_T^\tau e^{-st} f(t)dt$$

existe, si

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_T^\tau e^{-st}|f(t)|dt = \int_T^\infty e^{-st}|f(t)|dt < \infty, \tag{4.1}$$

así que estudiaremos este ultimo limite. Se tiene

$$\int_T^\tau e^{-st}|f(t)|dt \leq M \int_T^\tau e^{-st} e^{Ct}dt = M \int_T^\tau e^{-(s-C)t}dt$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$= \frac{M}{s-C}[e^{-(s-C)T} - e^{-(s-C)\tau}]$$

por lo tanto,

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_T^\tau e^{-st}|f(t)|dt \leq \frac{M}{s-C}e^{-(s-C)T}, \quad \text{para todo} \quad s > C.$$

Luego,

$$\int_T^\infty e^{-st}|f(t)|dt < \infty, \quad \text{para todo} \quad s > C.$$

lo que implica que

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

existe para todo $s > C$, que es lo que se quería demostrar ■

El siguiente teorema nos dice que la transformada es continua.

Teorema 4.2. *Supongamos que la función f satisface las condiciones del teorema anterior, entonces la transformada de Laplace, $F(s)$, es continua en el intervalo (C, ∞).*

Demostración 2. Sean $s_1, s_2 \in (C, \infty)$. Queremos demostrar que si $s_1 \to s_2$, entonces $F(s_1) \to F(s_2)$. Se tiene

$$\begin{aligned} F(s_1) &= \int_0^\infty e^{-s_1 t}f(t)dt \\ F(s_2) &= \int_0^\infty e^{-s_2 t}f(t)dt \end{aligned}$$

entonces,

$$|F(s_1) - F(s_2)| \leq \int_0^\infty |e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}||f(t)|dt.$$

Suponiendo, sin perder generalidad que $s_1 < s_2$, lo cual implica que $e^{-s_1 t} > e^{-s_2 t}$, se tiene

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$
\begin{aligned}
|F(s_1)-F(s_2)| &\leq \int_0^\infty (e^{-s_1t}-e^{-s_2t})|f(t)|dt \\
&= \int_0^T (e^{-s_1t}-e^{-s_2t})|f(t)|dt + \int_T^\infty (e^{-s_1t}-e^{-s_2t})|f(t)|dt \\
&\leq c_1\int_0^T (e^{-s_1t}-e^{-s_2t})dt + M\int_T^\infty (e^{-s_1t}-e^{-s_2t})e^{Ct}dt,
\end{aligned}
$$

donde $c_1 = \sup_{t\in[0,T]}|f(t)|$. Notando que

$$\int_0^T e^{-s_1t}dt \to \int_0^T e^{-s_2t}dt \quad \text{cuando} \quad s_1 \to s_2$$

y que

$$\int_T^\infty (e^{-s_1t}-e^{-s_2t})e^{Ct}dt = \int_T^\infty (e^{-(s_1-C)t}-e^{-(s_2-C)t})dt$$

$$= \quad \frac{1}{s_1-C}e^{-(s_1-C)T} - \frac{1}{s_2-C}e^{-(s_2-C)T} \to 0, \quad \text{cuando} \quad s_1 \to s_2,$$

se obtiene que

$$|F(s_1)-F(s_2)| \to 0, \quad \text{cuando} \quad s_1 \to s_2.$$

Esto implica que $F(s)$ es una función continua en (C,∞).

En el siguiente teorema evaluamos la transformada de Laplace de algunas funciones elementales.

Teorema 4.3. *Se tiene lo siguiente*

(a) $\quad \mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{s}, \quad s>0$

(b) $\quad \mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0, \quad n\geq 1$

(c) $\quad \mathcal{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}, \quad s>a$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

(d) $\mathcal{L}(\sin kt) = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

(e) $\mathcal{L}(\cos kt) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

(f) $\mathcal{L}(\sinh kt) = \dfrac{k}{s^2-k^2}$

(g) $\mathcal{L}(\cosh kt) = \dfrac{s}{s^2-k^2}$.

Demostración 3. (a) es inmediato. (b) por inducción, para $n = 1$, se debe tener

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1!}{s^2}$$

Probemos esto.

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^\infty te^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau te^{-st}dt,$$

y se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau te^{-st}dt &= \frac{te^{-st}}{-s}\Big|_0^\tau + \frac{1}{s}\int_0^\tau e^{-st}dt \\
&= -\frac{\tau e^{-s\tau}}{s} + \frac{1}{s}\frac{e^{-s\tau}}{-s}\Big|_0^\tau \\
&= -\frac{e^{-s\tau}}{s} + \frac{1}{s^2}[1-e^{-s\tau}] \longrightarrow \frac{1}{s^2} \quad \text{cuando} \quad \tau\to\infty.
\end{aligned}$$

Luego

$$\mathcal{L}(t) = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau te^{-st}dt = \int_0^\infty te^{-st}dt = \frac{1}{s^2}.$$

Suponemos ahora el resultado para n y queremos probarlo para $n+1$. Por definición

$$\mathcal{L}(t^{n+1}) = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau t^{n+1}e^{-st}dt$$

y

$$\int_0^\tau t^{n+1}e^{-st}dt = \frac{t^{n+1}e^{-st}}{-s}\Big|_0^\tau + \frac{(n+1)}{s}\int_0^\tau t^n e^{-st}dt.$$

Haciendo que $\tau \to \infty$ se obtiene

$$\mathcal{L}(t^{n+1}) = \frac{(n+1)}{s}\int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \frac{(n+1)}{s}\mathcal{L}(t^n) = \frac{(n+1)}{s}\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}.$$

Para demostrar (c), por definición se tiene

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \frac{1}{s-a}$$

Finalmente vamos a demostrar (d), el resto queda de ejercicio. Se tiene

$$\mathcal{L}(\sin kt) = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-st}\sin kt\ dt$$

y

$$\underbrace{\int_0^\tau e^{-st}\sin kt\ dt}_{I(\tau)} = \frac{\sin kt}{-s}e^{-st}\Big|_0^\tau + \frac{k}{s}\underbrace{\int_0^\tau e^{-st}\cos kt\ dt}_{J(\tau)}$$

de donde

$$I(\tau) = \frac{\sin k\tau}{-s}e^{-s\tau} + \frac{k}{s}J(\tau).$$

Por otro lado

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$
\begin{aligned}
J(\tau) &= \frac{\cos kt}{-s} e^{-st}\Big|_0^\tau - \frac{k}{s}\int_0^\tau e^{-st}\sin kt\ dt \\
&= \left(\frac{1}{s} - \frac{\cos k\tau\ e^{-s\tau}}{s}\right) - \frac{k}{s} I(\tau).
\end{aligned}
$$

Haciendo que $\tau \to \infty$ se obtiene primero que

$$
I(\tau) \to \mathcal{L}(\sin kt) \quad \text{y} \quad J(\tau) \to \mathcal{L}(\cos kt)
$$

y de las expresiones anteriores se obtiene entonces que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\sin kt) &= \frac{k}{s}\mathcal{L}(\cos kt) \\
\mathcal{L}(\cos kt) &= \frac{1}{s} - \frac{k}{s}\mathcal{L}(\sin kt).
\end{aligned}
$$

Resolviendo

$$
\mathcal{L}(\sin kt) = \frac{k}{s}\left[\frac{1}{s} - \frac{k}{s}\mathcal{L}(\sin kt)\right]
$$

que implica

$$
\mathcal{L}(\sin kt) = \frac{k}{s^2 + k^2}
$$

y análogamente,

$$
\mathcal{L}(\cos kt) = \frac{s}{k}\mathcal{L}(\sin kt) = \frac{s}{s^2 + k^2} \qquad \blacksquare
$$

Notemos ahora que la T. de L. es un operador lineal. De la definición se tiene que si $f, g : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ admiten de la T. de L. entonces

$$
\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t))
$$

para α y $\beta \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Esto se debe a que

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))dt$$

$$= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt.$$

Esto nos simplifica la evaluación de la T. de L.

Ejemplo 4.2. *Evaluar la T. de L. de* $5\cos 3t + 10\sinh 6t$.

$$\mathcal{L}(5\cos 3t + 10\sinh 6t) = 5\mathcal{L}(\cos 3t) + 10\mathcal{L}(\sinh 6t) = \frac{5s}{s^2+9} + \frac{60}{s^2-36}.$$

4.1. Transformada Inversa.

Vamos a comenzar con un ejemplo. Sabemos que

$$\mathcal{L}(\cos kt) = \frac{s}{s^2+k^2} = F(s)$$

Supongamos ahora que tenemos dada la expresión,

$$F(s) = \frac{s}{s^2+k^2}$$

y queremos saber si existe una función $f(t)$ tal que,

$$F(s) = \frac{s}{s^2+k^2} = \mathcal{L}(f(t))$$

En este caso, sabemos la respuesta, evidentemente $f(t) = \cos kt$.

Más generalmente dada una función $F : (C, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ con $C \geq 0$, queremos saber si existe una función $f(t)$ tal que,

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)).$$

Si una tal f existe, entonces usaremos la siguiente notación,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

y la llamaremos la transformada inversa de $F(s)$.

Como consecuencia inmediata del teorema 4.3 se tiene el siguiente resultado

Teorema 4.4. *Se tiene los siguientes resultados:*

(a) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1, \quad s > 0$$

(b) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right) = t^n, \quad n \geq 1 \textit{ entero}$$

(c) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at}, \quad s > a$$

(d) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right) = \sin kt$$

(e) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+k^2}\right) = \cos kt$$

(f) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k}{s^2-k^2}\right) = \sinh kt \quad s > |k|$$

(g) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-k^2}\right) = \cosh kt \quad s > |k|$$

Nota 4.1. Tenemos que la T. de L. de una función f esta definida por una integral

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s).$$

Si g es una función que difiere de f en un número finito de puntos aislados entonces obviamente se tendrá que

$$\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = F(s).$$

Este simple ejemplo demuestra que la ecuación

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) \tag{4.2}$$

no tiene solución única. Sin embargo, se puede demostrar que si dos funciones tienen la misma T. de L. entonces solo una de ellas puede ser continua.

En cuanto a propiedades de linealidad de la transformada inversa se tiene el siguiente resultado. Supongamos que

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

son funciones continuas (y de orden exponencial), entonces para α y β constantes cualesquiera

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)) = \alpha \mathcal{L}^{-1}(F(s)) + \beta \mathcal{L}^{-1}(G(s)).$$

En efecto, si

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = g(t)$$

donde f y g son funciones continuas, y si

$$Z(s) = \mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t)) = \alpha F(s) + \beta G(s),$$

entonces

$$\alpha f(t) + \beta g(t) = \mathcal{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)),$$

que implica

$$\alpha \mathcal{L}^{-1}(F(s)) + \beta \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)).$$

Ejemplo 4.3. *Calcule la transformada inversa de la función*

$$F(s) = \frac{s+6}{s^2+4}.$$

Escribimos

$$\frac{s+6}{s^2+4} = \frac{s}{s^2+4} + 3\frac{2}{s^2+4},$$

entonces

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+6}{s^2+4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \cos 2t + 3\sin 2t.$$

4.2. Propiedades operacionales.

Teorema 4.5. *(Primer teorema de traslación.) Sea $a \in \mathbb{R}$, y $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ una función que admite transformada de Laplace. Entonces*

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$.

Demostración 4. Se tiene que

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = F(s),$$

entonces

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a) \ \blacksquare$$

Ejemplo 4.4. *Evaluemos $\mathcal{L}(e^{-2t}\cos(4t))$. Se tiene que $f(t) = \cos(4t)$ y $a = -2$.*

$$F(s) = \mathcal{L}(\cos(4t)) = \frac{s}{s^2+16}$$
$$F(s+2) = \mathcal{L}(e^{-2t}\cos(4t)) = \frac{s+2}{(s+2)^2+16} = \frac{s+2}{s^2+4s+20}$$

Del teorema anterior se tiene que

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s-a)) = e^{at}f(t)$$

con $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$.

Ejemplo 4.5. *Encuentre $f(t)$ tal que* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+6s+11}\right)$.

Completando el cuadrado del binomio en el denominador

$$\frac{s}{s^2+6s+11} = \frac{s}{(s+3)^2+2}$$

y descomponiendo para identificar transformadas conocidas

$$= \frac{s+3}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2} - \frac{3}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{s+3}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2}$$

que tienen respectivamente la forma $\frac{s}{s^2+k^2}$ *y* $\frac{k}{s^2+k^2}$ *(con* $k = \sqrt{2}$*) pero desplazadas.*

Sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+(\sqrt{2})^2}\right) = \cos(\sqrt{2}t)$$

y utilizando el teorema anterior,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2}\right) = (\cos(\sqrt{2}t))e^{-3t}$$

De la misma forma

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2}\right) = (\sin(\sqrt{2}t))e^{-3t}$$

ya que $\mathcal{L}^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2}) = \sin(\sqrt{2}t)$.

Finalmente usando la linealidad de la transformada inversa, se concluye que

$$f(t) = \cos(\sqrt{2}t)e^{-3t} - \frac{3}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)e^{-3t}.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

En el segundo teorema de traslación vamos a usar la siguiente función, que llamaremos función escalón unitario o simplemente función escalón.

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a, \\ 1 & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

donde $a \geq 0$. Notemos que esta función está definida para $t \geq 0$, es continua a trozos, y de orden exponencial. En particular la función $U(t)$ es igual a 1 para todo $t \geq 0$.

Teorema 4.6. *(Segundo teorema de traslación) Sea $a \geq 0$ y $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ una función que admite transformada de Laplace. Entonces*

$$\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a)) = e^{-as}F(s)$$

con $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$.

Demostración 5. De la definición de T. de L.

$$\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a)) = \int_0^\infty f(t-a)U(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt.$$

Haciendo el cambio de variable de integración $t - a = u$, nos queda

$$\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a)) = \int_0^\infty f(u)e^{-s(a+u)}du = e^{-sa}\int_0^\infty f(u)e^{-su}du$$

$$= e^{-sa}F(s). \blacksquare$$

Nota. La forma inversa del teorema es

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-sa}F(s)) = f(t-a)U(t-a).$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.6. *Consideremos la función f definida por*

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$f(t) = \begin{cases} 2 & si \quad 0 \leq t < 2 \\ -1 & si \quad 2 \leq t < 3 \\ 0 & si \quad t \geq 3. \end{cases}$$

Con la ayuda de la función escalón la podemos escribir como

$$f(t) = 2U(t) - 3U(t-2) + U(t-3).$$

Evaluando su T. de L., obtenemos

$$\mathcal{L}(f(t)) = 2\mathcal{L}(U(t)) - 3\mathcal{L}(U(t-2)) + \mathcal{L}(U(t-3)) = \frac{2}{s} - \frac{3}{s}e^{-2s} + \frac{e^{-3s}}{s}.$$

Ejemplo 4.7. *Calculemos* $\mathcal{L}(\sin(t)\, U(t-2\pi))$*. Notamos que esta función aparentemente no tiene la forma* $\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a))$*. Sin embargo se puede reducir a dicha forma usando que* $\sin(t)$ *es* 2π *periódica, esto es* $\sin t = \sin(t-2\pi)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*. Entonces* $\sin(t)\, U(t-2\pi) = \sin(t-2\pi)U(t-2\pi)$*, con lo cual*

$$\mathcal{L}(\sin(t)\, U(t-2\pi)) = \mathcal{L}(\sin(t-2\pi)U(t-2\pi) = e^{-2\pi s}\mathcal{L}(\sin t) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

Teorema 4.7. *(Derivadas de una transformada) Sea* $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ *continua a trozos y de orden exponencial* ($|f(t)| \leq Me^{Ct}$ *para todo* $t \geq T$)*. Entonces para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $s > C+1$*, se tiene que*

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t)) \tag{4.3}$$

donde $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$*.*

Nota. Este teorema se usa muchas veces en la forma

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s).$$

Demostración 6. Se tiene, por definición, que

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

donde vamos a suponer de ahora en adelante que $s > C+1$. Notamos que (4.3) se puede obtener derivando formalmente bajo la integral con respecto a s. Se obtiene

$$\frac{dF(s)}{ds} = -\int_0^\infty te^{-st}f(t)dt \tag{4.4}$$

que corresponde al caso $n = 1$ en (4.3),

$$\frac{d^2F(s)}{ds^2} = \int_0^\infty t^2e^{-st}f(t)dt,$$

etc. Justifiquemos este proceso. Formemos

$$F(s+h) - F(s) = \int_0^\infty (e^{-(s+h)t} - e^{-st})f(t)dt = \int_0^\infty (e^{-ht} - 1)e^{-st}f(t)dt. \tag{4.5}$$

Definamos

$$I(h) := \frac{F(s+h) - F(s)}{h} + \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt.$$

(4.4) será cierta si $\lim_{h\to 0} I(h) = 0$. Probemos esto. De (4.5) se tiene

$$I(h) = \int_0^\infty \left(\left(\frac{e^{-ht} - 1}{h}\right) + t\right) f(t)e^{-st}dt. \tag{4.6}$$

Usamos desarrollo en series para acotar la función $(\frac{e^{-ht}-1}{h}) + t$, se tiene

$$\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t = \frac{ht^2}{2!} - \frac{h^2t^3}{3!} \pm \ldots = h\left(\frac{t^2}{2!} - \frac{ht^3}{3!} \pm \ldots\right).$$

Con lo cual

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$|\frac{e^{-ht}-1}{h}+t| \leq |h|\left(\frac{t^2}{2!}+\frac{t^2}{3!}+\dots\right),$$

donde sin pérdida de generalidad tomamos $|h| \leq 1$. Entonces

$$|\frac{e^{-ht}-1}{h}+t| \leq |h|e^t$$

Tomando valor absoluto en (4.6), reemplazando la ultima expresión, y usando que f es de orden exponencial, obtenemos

$$|I(h)| \leq |h|\int_0^\infty e^t|f(t)|e^{-st}dt \leq |h|\Big(\int_0^T e^{(1-s)t}f(t)dt + M\int_T^\infty e^{-(s-C-1)t}dt\Big),$$

donde recordamos que hemos tomado $s > C+1$. Por lo tanto

$$|I(h)| \leq |h|\Big(\int_0^T e^{(1-s)t}f(t)dt + \frac{Me^{-(s-C-1)T}}{s-C-1}\Big),$$

de donde $\lim\limits_{h\to 0} I(h) = 0$.

Ahora vamos a probar el caso general. Lo hacemos por inducción, notamos que la demostración recién hecha corresponde al caso $n = 1$. Supongamos entonces (4.3) para n y probemos el caso $n+1$. De la definición de T. de L.

$$\mathcal{L}(t^{n+1}f(t)) = \int_0^\infty t^{n+1}f(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty t^n(tf(t))e^{-st}dt = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}G(s)$$

donde $G(s) = \mathcal{L}(tf(t))$. Pero

$$\mathcal{L}(tf(t)) = (-1)\frac{d}{ds}F(s),$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

por lo que

$$\mathcal{L}(t^{n+1}f(t)) = (-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}F(s). \blacksquare$$

Nota. La forma inversa de este Teorema es

$$t^n f(t) = (-1)^n \mathcal{L}^{-1}(\frac{d^n}{ds^n}F(s)).$$

Algunos ejemplos.

Ejemplo 4.8. *Se pide evaluar* $\mathcal{L}(t^2\sin(kt))$*.*

Vamos a aplicar el teorema anterior. Tomamos $f(t) = \sin(kt)$*, entonces*

$$F(s) = \mathcal{L}(\sin(kt)) = \frac{k}{s^2+k^2}.$$

Del teorema anterior, con $n = 2$*, se tiene*

$$\mathcal{L}(t^2\sin(kt)) = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s) = \frac{d^2}{ds^2}\frac{k}{s^2+k^2}.$$

Derivando

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{-2ks}{(s^2+k^2)^2}$$

y

$$\frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{2k(3s^2-k^2)}{(s^2+k^2)^3}.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(t^2\sin(kt)) = 2k\frac{3s^2-k^2}{(s^2+k^2)^3}.$$

Notemos que también se tiene

$$t^2\sin(kt) = 2k\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{3s^2-k^2}{(s^2+k^2)^3}\Big).$$

Ejemplo 4.9. *Se quiere calcular $\mathcal{L}(te^{-t}\cos t)$. Usamos el teorema anterior, con $f(t) = e^{-t}\cos t$. Se tiene*

$$F(s) = \mathcal{L}(e^{-t}\cos t) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}.$$

Derivando

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{-(s^2+2s)}{(s^2+2s+2)^2},$$

y aplicando el teorema anterior, se obtiene

$$\mathcal{L}(te^{-t}\cos t) = \frac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}.$$

4.3. Aplicaciones a EDO. A continuación vamos a aplicar la T. de L. para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden n de la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t),$$

donde los coeficientes $a_0, \cdots, a_n$ son constantes. El método consitirá en aplicar T. de L. a ambos miembros de esta ecuación. De aquí se ve la necesidad de saber calcular la T. de L. de derivadas de y. Esto lo hacemos en el siguiente teorema.

Recordemos primero que $h : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ es de orden exponencial si existen constantes positivas C, M, T tal que

$$|h(t)| \le Me^{Ct} \quad \text{para todo} \quad t \ge T. \tag{4.7}$$

Teorema 4.8. *(Transformada de derivadas.) Sea $f : [0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$ que satisface la siguiente condición. $f, f', \ldots, f^{(n)}$ son continuas a trozos y de orden exponencial, suponemos que todas estas funciones satisfacen (4.7), con las mismas constantes. Entonces, si $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, se tiene*

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad s > C.$$

Notemos que $f, f', \ldots, f^{(n)}$ son continuas excepto en un conjunto numerable de puntos en $[0,\infty)$.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Demostración 7. Por inducción. Primero el caso $n = 1$. Queremos demostrar

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0).$$

Se tiene:

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau f'(t)e^{-st}dt$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \left[f(t)e^{-st}|_0^\tau + s\int_0^\tau f(t)e^{-st}dt \right]$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \left[f(\tau)e^{-s\tau} - f(0) + s\int_0^\tau f(t)e^{-st}dt \right]$$

$$= s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0),$$

ya que

$$|f(\tau)e^{-s\tau}| \le Me^{C\tau}e^{-s\tau} = Me^{-(s-C)\tau}, \quad s > C,$$

y por lo tanto

$$\lim_{\tau\to\infty} f(\tau)e^{-s\tau} = 0.$$

Queda entonces demostrado el caso $n = 1$. Supongamos a continuación el resultado cierto para n y queremos probarlo para $n + 1$. Se tiene:

$$\mathcal{L}(f^{(n+1)}(t)) = \int_0^\infty f^{(n+1)}(t)e^{-st}dt$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \left[f^{(n)}(t)e^{-st}|_0^\tau + s\int_0^\tau f^{(n)}(t)e^{-st}dt \right]$$

$$= s\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) - f^{(n)}(0).$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Esto es

$$\mathcal{L}(f^{(n+1)}(t)) = s\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) - f^{(n)}(0).$$

Reemplazando en esta expresión

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

que es la hipótesis de inducción, nos queda finalmente

$$\mathcal{L}(f^{(n+1)}(t)) = s^{n+1}F(s) - s^n f(0) \ldots - sf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0),$$

que es el caso $n+1$. Esto termina la demostración ■

Consideremos

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2, \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_n,$$

donde g es una función que admite T. de L. y

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \quad y \quad c_0, \ldots, c_n \text{ son constantes reales.}$$

Vamos a aplicar T. de L. a ambos miembros. Sea

$$Y(s) = \mathcal{L}(y(t)),$$

entonces, del teorema anterior

$$\mathcal{L}(y^{(i)}(t)) = s^i Y(s) - s^{i-1}y(0) - s^{i-2}y'(0) - \cdots - sy^{(i-2)}(0) - y^{(i-1)}(0),$$

para $i = 1, ..., n$. Aplicando esto a la ecuación diferencial, se obtiene

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$a_n[s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0)] +$$

$$a_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \ldots - y^{(n-2)}(0)] +$$

$$a_{n-2}[s^{n-2}Y(s) - s^{n-3}y(0) - \ldots - y^{(n-3)}(0)] + \cdots + a_0Y(s) = G(s)$$

donde $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$. Agrupando, se obtiene

$$P(s)Y(s) + Q(s) = G(s).$$

donde

$$P(s) = a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1s + a_0$$

(polinomio característico) y $Q(s)$ es un polinomio de grado s^{n-1} en s, función de las condiciones iniciales. Despejando $Y(s)$, se obtiene

$$Y(s) = \frac{G(s) - Q(s)}{P(s)} = \frac{G(s)}{P(s)} - \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

Para encontrar $y(t)$ tenemos que aplicar transformada inversa a esta ultima expresión, nos da

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{P(s)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(s)}{P(s)}\right\}.$$

Ejemplo 4.10. *Resuelva usando T. de L.*

$$y' - 3y = e^{2t}, \quad y(0) = 1.$$

Aplicando T. de L. y con la notación anterior

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$sY(s) - \underbrace{y(0)}_{1} - 3Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$(s-3)Y(s) = 1 + \frac{1}{s-2} = \frac{s-1}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)},$$

usamos fracciones parciales, (repasar), para lo cual escribimos:

$$Y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3}$$

calculando, obtenemos

$$A = -1 \quad B = 2.$$

y por lo tanto

$$Y(s) = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-3}.$$

Aplicando T. I., resulta

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-2}) + 2\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-3}) = -e^{2t} + 2e^{3t}.$$

Ejemplo 4.11. *Resuelva usando T. de L. (ecuación del péndulo en resonancia)*

$$y'' + k^2 y = \cos kt, \qquad k > 0,$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = c_1, \quad y'(0) = c_2.$$

Aplicando T. de L. en ámbos lados de la ecuación, se obtiene:

$$s^2 Y(s) - sc_1 - c_2 + k^2 Y(s) = \frac{s}{s^2+k^2}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+k^2)^2} + \frac{sc_1 + c_2}{s^2+k^2}$$

$$= \frac{s}{(s^2+k^2)^2} + c_1 \frac{s}{s^2+k^2} + c_2 \frac{1}{s^2+k^2}.$$

Aplicando T. I.,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+k^2)^2}\} + c_1 \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+k^2}\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+k^2}\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+k^2)^2}\} + c_1 \cos kt + \frac{c_2}{k} \sin kt.$$

Para evaluar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+k^2)^2}\right\}$ *vamos a usar la fórmula* $\frac{d}{ds}F(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$, *o mejor* $tf(t) = -\mathcal{L}^{-1}(\frac{d}{ds}F(s))$. *Identificando* $F(s) = \frac{1}{s^2+k^2}$, *se tiene primero que*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{k} \sin kt.$$

A continuación notando que

$$\frac{s}{(s^2+k^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{(s^2+k^2)^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+k^2}\right).$$

se tiene que

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+k^2}\right) = -\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}\{tf(t)\} = \mathcal{L}\left\{t\frac{\sin kt}{k}\right\},$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

y entonces

$$\frac{s}{(s^2+k^2)^2} = \frac{1}{2k}\mathcal{L}\{t\sin kt\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+k^2)^2}\right) = \frac{1}{2k}t\sin kt. \tag{4.8}$$

Finalmente

$$y(t) = \frac{t\sin kt}{2k} + c_1\cos kt + \frac{c_2}{k}\sin kt$$

Ejemplo 4.12. *Resuelva la ecuación con condiciones iniciales*

$$y'' + 16y = f(t), \quad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1.$$

donde $f(t) = \cos 4t\,(U(t) - U(t-\pi))$. *Poniendo* $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$, *y aplicando T. de L.*

$$s^2Y(s) - 1 + 16Y(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{4.9}$$

pero

$$f(t) = \cos 4t\,(U(t) - U(t-\pi)) = \cos 4t - \cos 4t\,U(t-\pi)$$

$$= \cos 4t - \cos 4(t-\pi)U(t-\pi),$$

de donde

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s}{s^2+16} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+16}.$$

Substituyendo en (6.29) y despejando $Y(s)$,

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+16)^2} - e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+16)^2} + \frac{1}{s^2+16}. \tag{4.10}$$

Ahora de (4.8), se tiene que

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{(s^2+16)^2}) = \frac{1}{8}t\sin 4t.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+16)^2}\right\} = \frac{1}{8}U(t-\pi)(t-\pi)\sin 4(t-\pi).$$

Finalmente tomando T.I en (6.30), nos queda

$$y(t) = \frac{1}{8}t\sin 4t - \frac{1}{8}U(t-\pi)(t-\pi)\underbrace{\sin 4(t-\pi)}_{\sin 4t} + \frac{1}{4}\sin 4t$$

$$= \frac{\sin 4t}{4}\left(\frac{t}{2} - \frac{U(t-\pi)(t-\pi)}{2} + 1\right),$$

que se puede escribir como,

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{8}t\sin 4t & 0 \le t < \pi \\ \frac{2+\pi}{8}\sin 4t & t \ge \pi. \end{cases}$$

4.4. Producto de Convolución. Sean $f, g : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones que admiten T. de L. Definimos el producto de convolución de f y g, que denotamos por $f * g$, de la forma siguiente:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Es inmediato ver que este producto satisface

$$f * g = g * f.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

En efecto, haciendo el cambio de variable $t-\tau=s$ en la definición, se tiene

$$(f*g)(t)=-\int_t^0 f(t-s)g(s)ds=\int_0^t f(t-s)g(s)ds=(g*f)(t)$$

El teorema principal respecto del producto de convolución es el siguiente.

Teorema 4.9. *Sean $f,g:[0,+\infty)\mapsto\mathbb{R}$ dos funciones continuas a trozos y de orden exponencial tal que ambas satisfacen (4.7), entonces*

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}=F(s)G(s),$$

donde $F(s)=\mathcal{L}(f(t))$ y $G(s)=\mathcal{L}(g(t))$.

Forma inversa del teorema:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s))=(f*g)(t)$$

Demostración 8 (del Teorema 4.9)**.** Vamos a redefinir f y g agregando la condición que $f(t)=g(t)=0$ para todo $t<0$. Del segundo teorema de traslación se tiene que

$$\mathcal{L}(g(t-\tau))=\int_0^\infty g(t-\tau)e^{-st}dt=\int_0^\infty U(t-\tau)g(t-\tau)e^{-st}dt=e^{-s\tau}G(s),$$

donde $s>C$. De aquí

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty f(\tau)G(s)e^{-s\tau}d\tau=\int_0^\infty f(\tau)(\int_0^\infty g(t-\tau)e^{-st}dt)d\tau$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}dtd\tau.$$

Se puede demostrar que se puede intercambiar los limites de integración (Ej.), de donde

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish),
Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$F(s)G(s) = \lim_{R\to\infty} \int_0^\infty e^{-st} \int_0^R f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt = \lim_{R\to\infty} (I_1(R) + I_2(R)),$$

donde

$$I_1(R) = \int_0^R e^{-st} \int_0^R f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt$$

$$I_2(R) = \int_R^\infty e^{-st} \int_0^R f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt.$$

Afirmación. De la condición f y g satisfacen (4.7), se tiene que existe una constante $N > 0$ tal que

$$|e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)| \leq Ne^{-s\tau} e^{C\tau} e^{C(t-\tau)} = Ne^{-(s-C)t}. \tag{4.11}$$

En efecto de (4.7)

$$|h(t)| \leq Me^{Ct} \quad \text{para todo} \quad t \geq T > 0,$$

y donde $h = f$ o $h = g$. Como f, g son continuas a trozos existe una constante $M_0 > 0$ tal que para todo $t \in [0, T]$ se tiene que $f(t) \leq M_0$ y $g(t) \leq M_0$, entonces

$$|h(t)| \leq M_0 + Me^{Ct} \leq \tilde{N}e^{Ct} \quad \text{para todo} \quad t \geq 0,$$

y donde $\tilde{N} = M_0 + M$. De aquí (4.11) se sigue inmediatamente, definiendo $N = \tilde{N}^2$. Usando (4.11) en I_2 se tiene

$$|I_2(R)| \leq N \int_R^\infty e^{-(s-C)t} \int_0^R d\tau dt = \frac{NR}{s-C} e^{-(s-C)R} \to 0$$

cuando $R \to \infty$. Por otro lado la región de integración en la integral de I_1 es

$$0 \leq t \leq R \quad 0 \leq \tau \leq R,$$

por lo que se tiene que

$$I_1(R) = \int_0^R e^{-st} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt.$$

Entonces

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$F(s)G(s) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt = \mathcal{L}((f*g)(t)). \blacksquare$$

Nota. Un caso particular interesante es cuando $f = g$, en este caso se tiene

$$(F(s))^2 = \mathcal{L}((f*f)(t)).$$

Ejemplo 4.13. *Encuentre* $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right)$. *Aplicando la forma inversa del teorema, se tiene*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right) = \frac{1}{k^2}(\sin k(\cdot) * \sin k(\cdot))(t)$$

$$= \frac{1}{k^2}\int_0^t \sin k\tau \sin k(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt),$$

donde hemos usado las identidades trigonométricas:

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B, \tag{4.12}$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B. \tag{4.13}$$

Corolario 1. *Transformada de una integral. Sea* $f : [0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$ *continua a trozos y de orden exponencial. Entonces*

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s),$$

donde

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)).$$

Forma inversa del teorema.

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}F(s)) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Demostración 9 (del Corolario 1)**.** Se tiene

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = -\int_t^0 f(t-s)ds = \int_0^t f(t-s)ds$$

donde hemos hecho el cambio de variable $\tau = t - s$. Mirando la ultima expresión como la integral de 1 por $f(t-s)$ y recordando que $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$, del ultimo teorema se sigue inmediatamente que

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s).$$

Ejemplo 4.14. *Encuentre* $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$

Definiendo $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ *y* $G(s) = \frac{1}{s^2+4}$, *se tiene que*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t$$

y

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{1}{2}\sin 2t.$$

Entonces del teorema anterior, se sigue que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sin\tau\sin 2(t-\tau)d\tau.$$

Usando las identidades trigonométricas (4.12), (4.13), se obtiene que

$$2\sin\tau\sin 2(t-\tau) = \cos(3t-2\tau) - \cos(2t-\tau).$$

Reemplazando esta expresión en la integral e integrando, resulta:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t$$

Ejemplo 4.15. *Encuentre* $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+k^2)^2}\right)$.

Definiendo $F(s) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$ *y* $G(s) = \dfrac{1}{s^2+k^2}$, *se tiene que*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+k^2}\right) = \cos kt$$

y

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+k^2}\right) = \frac{1}{k}\sin kt.$$

Del teorema del producto de convolución

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+k^2)^2}\right) = \frac{1}{k}\int_0^t \cos k\tau \sin k(t-\tau)d\tau = \frac{t\sin(kt)}{2k},$$

que es el mismo valor que conseguimos por otro método.

4.5. Transformada de Laplace de funciones periódicas.

Teorema 4.10. *Sea* $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ *continua a tramos y de orden exponencial* $(|f(t)| \leq Me^{Ct},\ t \geq T)$. *Supongamos que existe una constante* $a > 0$ *tal que* $f(t+a) = f(t)$, *para todo* $t \geq 0$. *Entonces*

$$F(s) = \frac{\int_0^a e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sa}},$$

donde como siempre $F(s) = \mathcal{L}(f(t)$.

En este caso diremos que la función $f(t)$ es $a-$ periódica para $t \geq 0$.

Demostración 10. Se tiene, por definición de la T. de L.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^a e^{-st}f(t)dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t)dt.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Haciendo el cambio de variable de integración $\tau = t - a$ en la ultima integral, se obtiene

$$\int_a^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau + a)d\tau = e^{-sa} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau = e^{-sa} F(s),$$

por lo que

$$F(s) = \int_0^a e^{-st} f(t)dt + e^{-sa} F(s),$$

que implica el resultado. ■

Ejemplo 4.16. *Encuentre la T. de L. de la función $M_b(t)$ definida por*

$$M_b(t) = \begin{cases} 1 \quad si \quad 0 \leq t < b \\ -1 \quad si \quad b \leq t < 2b, \end{cases}$$
$$M_b(t + 2b) = M_b(t).$$

Se tiene

$$\int_0^{2b} e^{-st} M_b(t)dt = \int_0^b e^{-st} dt - \int_b^{2b} e^{-st} dt = \frac{1}{s}(1 - e^{-bs})^2.$$

Entonces

$$\mathcal{L}(M_b(t)) = \frac{(1 - e^{-bs})^2}{s(1 - e^{-2bs})} = \frac{(1 - e^{-bs})}{s(1 + e^{-bs})} = \frac{1}{s} \tanh \frac{bs}{2}. \tag{4.14}$$

Ejemplo 4.17. *Se quiere encontrar la T. de L. de $H_b(t)$, dado por*

$$H_b(t) = \begin{cases} t \quad si \quad 0 \leq t < b \\ 2b - t \quad si \quad b \leq t < 2b, \end{cases}$$
$$H_b(t + 2b) = H_b(t).$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Para resolver este problema notamos que H_b satisface $H_b(t) = \int_0^t M_b(\tau)d\tau$. Esto es claro si $t \in [0, 2b)$. Si $t \geq 2b$ se tiene

$$H_b(t+2b) = \int_0^{t+2b} M_b(\tau)d\tau = \int_0^t M_b(\tau)d\tau + \int_t^{t+2b} M_b(\tau)d\tau$$

$$= H_b(t) + \int_t^{t+2b} M_b(\tau)d\tau.$$

Por lo que hay que probar que

$$\int_t^{t+2b} M_b(\tau)d\tau = 0,$$

lo cual queda de ejercicio.

Aplicando la formula $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, se obtiene de inmediato que

$$\mathcal{L}(H_b(t)) = \frac{1}{s^2}\tanh\frac{bs}{2}.$$

A continuación por aplicación directa de (4.14) se tiene que

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}M_b(t)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{(1-e^{-bs})}{s(1+e^{-bs})}\right) = \frac{1}{s(1+e^{-bs})}.$$

Notemos que la función $R_b(t) := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}M_b(t)$ queda dada por la siguiente expresión:

$$R_b(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq t < b \\ 0 & si \quad b \leq t < 2b, \end{cases}$$

$$R_b(t+2b) = R_b(t).$$

Usando terminologia de Ingenieria eléctrica decimos que $R_b(t)$ es una rectificación de media onda de la función $M_b(t)$.

Más generalmente consideremos una función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ continua a trozos en el intervalo $[0, 2b]$ y que satisface $f(t+b) = -f(t)$ para $t \in [0, b)$ y $f(t+2b) = f(t)$ para todo $t > 0$. Calculemos la T. de L. de esta función. Se tiene primero lo siguiente.

$$\int_0^{2b} e^{-st}f(t)dt = \int_0^b e^{-st}f(t)dt + \int_b^{2b} e^{-st}f(t)dt$$

$$= \int_0^b e^{-st}f(t)dt + \int_0^b e^{-s(\tau+b)}f(\tau+b)d\tau = \int_0^b e^{-st}f(t)dt - e^{-sb}\int_0^b e^{-st}f(t)dt$$

$$= (1-e^{-bs})\int_0^b e^{-st}f(t)dt.$$

A continuación aplicando la formula para la transformada de una función periódica, obtenemos

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \frac{1}{(1-e^{-2sb})}\int_0^{2b} e^{-st}f(t)dt = \frac{(1-e^{-bs})}{(1-e^{-2sb})}\int_0^b e^{-st}f(t)dt,$$

de donde finalmente obtenemos

$$F(s) = \frac{1}{(1+e^{-sb})}\int_0^b e^{-st}f(t)dt.$$

Sea ahora $f_1(t)$ la rectificación de media onda de $f(t)$. Evaluemos su T. de L. Tenemos que esta función es $2b$ periódica, aplicando entonces la formula para la transformada de una función periódica, obtenemos

$$F_1(s) = \int_0^\infty e^{-st}f_1(t)dt = \frac{1}{(1-e^{-2sb})}\int_0^{2b} e^{-st}f_1(t)dt$$

$$= \frac{1}{(1-e^{-2sb})}\int_0^b e^{-st}f(t)dt = \frac{(1+e^{-sb})}{(1-e^{-2sb})}F(s) = \frac{F(s)}{(1-e^{-sb})}.$$

Definamos a continuación la función $f_2(t) = f_1(t-b)$, donde suponemos $f_1(\tau) = 0$ para $\tau < 0$. Entonces se tiene

$$F_2(s) := \mathcal{L}(f_2(t)) = \mathcal{L}(f_1(t-b)) = \mathcal{L}(U(t-b)(f_1(t-b)) = e^{-bs}F_1(s) = \frac{e^{-bs}F(s)}{(1-e^{-sb})}.$$

Supongamos finalmente que $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Entonces

$$F_3(s) := \mathcal{L}(f_3(t)) = \mathcal{L}(f_1(t)) + \mathcal{L}(f_2(t)) = \frac{F(s)}{(1-e^{-sb})} + \frac{e^{-bs}F(s)}{(1-e^{-sb})}$$

$$= \frac{(1+e^{-bs})F(s)}{(1-e^{-sb})} = \coth\left(\frac{bs}{2}\right)F(s).$$

La función f_3 se llama la rectificación de onda completa de la función f.

Ejemplo 4.18. *Consideremos $f(t) = \sin t$. Sabemos que $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$. A modo de ejercicio vamos a calcular esta transformada asi como otras aplicando las formulas anteriores.*

Se tiene que $f(t) = \sin t$ satisface las condiciones $f(t+\pi) = -f(t)$ para $t \in [0,\pi)$ y $f(t+2\pi) = f(t)$ para todo $t > 0$. Podemos calcular su transformada por la fórmula

$$F(s) = \frac{1}{(1+e^{-s\pi})}\int_0^\pi e^{-st}\sin t dt.$$

Como se tiene que

$$\int_0^\pi e^{-st}\sin t dt = (e^{\pi s}+1)\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1},$$

se obtiene

$$F(s) = \frac{1}{(1+e^{-s\pi})}(e^{-\pi s}+1)\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}.$$

Ejemplo 4.19. *La rectificación de media onda de* $\sin t$ *es la función*

$$f_1(t) = \begin{cases} \sin t & si \quad 0 \le t < \pi \\ 0 & si \quad \pi \le t < 2\pi, \end{cases}$$

$$f_1(t+2\pi) = f_1(t).$$

Su transformada es dada por

$$F_1(s) = \frac{F(s)}{(1-e^{-s\pi})} = \frac{1}{(1-e^{-s\pi})(s^2+1)}.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Evaluemos la T. de L. de la función $f_2(t) = f_1(t-\pi)$, donde suponemos $f_1(\tau) = 0$ para $\tau < 0$. Notamos primero que

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t < \pi \\ |\sin t| & si \quad \pi \leq t < 2\pi, \end{cases}$$

$$f_2(t + 2\pi) = f_2(t).$$

Entonces se tiene

$$F_2(s) := \mathcal{L}(f_2(t)) = \frac{e^{-\pi s} F(s)}{(1 - e^{-s\pi})} = \frac{e^{-\pi s}}{(1 - e^{-s\pi})(s^2 + 1)}.$$

Supongamos finalmente que $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Entonces es claro que $f_3(t) = |\sin t|$, para todo $t \geq 0$. Se tiene de las formulas anteriores que

$$F_3(s) = \coth(\frac{\pi s}{2}) F(s) = \frac{\coth(\frac{\pi s}{2})}{s^2 + 1}.$$

La función f_3 se llama la rectificación de onda completa de $\sin t$.

Por otro lado como la función $|\sin t|$ es π periodica su transformada se puede calcular directamente por medio de

$$F_3(s) = \mathcal{L}(|\sin t|) = \frac{1}{(1 - e^{-s\pi})} \int_0^{\pi} e^{-st} |\sin t| dt,$$

lo que nos da el mismo resultado.

4.6. Delta de Dirac. Vamos a estudiar ahora una condición que debe cumplir una función $F : [C, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $C > 0$, para ser la T. de L. de una función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ continua a trozos y de orden exponencial, esto es

$$|f(t)| \leq Me^{Ct} \quad \text{para todo} \quad t \geq T.$$

Como antes, existe una constante $N > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq Ne^{Ct} \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

Entonces se tiene

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$|F(s)| = |\mathcal{L}(f(t))| \leq \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt \leq N\int_0^\infty e^{-(s-C)t}dt \leq \frac{N}{s-C},$$

de donde

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

En particular , la función $\dfrac{s}{s+1}$ no es la T. de L . de ninguna función continua a trozos y de orden exponencial.

A continuación vamos a estudiar las funciones delta de Dirac. Consideremos primero el siguiente ejemplo. Sea $h_n^a : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$h_n^a(t) = \begin{cases} n & \text{si} \quad a \leq t < a + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [a, a+\frac{1}{n}). \end{cases}$$

donde $a \geq 0$. Entonces para todo $b \geq a + \frac{1}{n}$, se tiene

$$\int_0^b h_n^a(t)dt = \int_a^{a+\frac{1}{n}} h_n^a(t)dt = 1,$$

y de aquí

$$\int_0^\infty h_n^a(t)dt = 1.$$

Notamos que tomando el límite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b h_n^a(t)dt = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty h_n^a(t)dt = 1.$$

Supongamos que se pudiera intercambiar el límite con la integral y llamemos $\delta_a(t)$ la función límite bajo el signo integral, esto es

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b h_n^a(t)dt = \int_0^b \lim_{n\to\infty} h_n^a(t)dt = \int_0^b \delta_a(t)dt = 1,$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty h_n^a(t)dt = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} h_n^a(t)dt = \int_0^\infty \delta_a(t)dt = 1.$$

Mostremos a continuación que tal función $\delta_a(t)$ no puede existir. En efecto, como es inmediato de ver, se tiene que $\lim_{n\to\infty} h_n^a(t) = 0$ excepto en el punto a. De la teoría de integración se sigue entonces que $\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} h_n^a(t)dt = 0$, lo que nos da una contradicción.

Vamos a introducir a continuación las funciones δ. Sea $g : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, para n grande, por el teorema del valor medio, se tiene que

$$\int_a^{a+\frac{1}{n}} g(t)dt = \frac{1}{n}g(t^*),$$

para algún $t^* \in [a, a+\frac{1}{n}]$. De aquí, usando la continuidad de g, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty h_n^a(t)g(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^{a+\frac{1}{n}} h_n^a(t)g(t)dt = \lim_{n\to\infty} n\int_a^{a+\frac{1}{n}} g(t)dt = g(a).$$

Sabemos por lo visto antes que no podemos pasar el límite bajo el signo integral. Sin embargo podemos pensar así, el proceso que hemos hecho asigna a cada g continua su valor $g(a)$. LLamemos Δ_a el operador que manda las funciones g en su valor en el punto a, esto es $\Delta_a(g) = g(a)$. Es fácil ver que para α y β reales:

$$\Delta_a(\alpha g + \beta h) = (\alpha g + \beta h)(a) = \alpha g(a) + \beta h(a) = \alpha\Delta_a(g) + \beta\Delta_a(h).$$

esto es el operador Δ_a es lineal. Es costumbre escribir

$$\Delta_a(g) = \int_0^\infty \delta_a(t)g(t)dt,$$

con lo que la acción del operador Δ_a, queda como

$$\int_0^\infty \delta_a(t)g(t)dt = g(a).$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Por abuso de lenguaje vamos a llamar al símbolo δ_a. una función δ. El operador Δ_a es lo que se conoce como una distribución, llamada la distribución de Dirac. Notemos que si tomamos $g(t) = e^{-st}$ entonces

$$\int_0^\infty \delta_a(t)e^{-st}dt = e^{-sa}.$$

Debido a esto vamos a decir que la T. de L. de la función δ_a es e^{-sa}, esto es $\mathcal{L}(\delta_a) = e^{-sa}$. En particular si $a = 0$ entonces denotando $\delta(t) := \delta_0(t)$ se tiene $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$. Se tiene también que $\delta_a(t) = \delta(t-a)$.

Nosotros queremos resolver ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes con segundo miembro que contiene funciones δ. Consideremos primero el caso de la ecuación

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = \delta_a(t). \tag{4.15}$$

A una ecuación como esta le vamos dar el siguiente sentido. Consideramos el problema

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = h_n^a(t),$$

y llamaremos y_n^a su solución. Entonces por solución de (4.15) vamos a entender $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^a(t) = y(t)$. Calculemos entonces y_n^a. Como

$$h_n^a(t) = n(U(t-a) - U(t-a-\frac{1}{n})),$$

tenemos que resolver

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = n(U(t-a) - U(t-a-\frac{1}{n})).$$

Para simplificar el análisis vamos a suponer además que la solución que buscamos satisface $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Llamando $Y_n(s) = \mathcal{L}(y(t))$ y tomando T. de L. en ambos lados de la ecuación se obtiene

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$(a_2s^2 + a_1s + a_0)Y_n(s) = n\frac{e^{-sa} - e^{-s(a+\frac{1}{n})}}{s} = e^{-sa}\frac{(1 - e^{-\frac{s}{n}})}{\frac{s}{n}}.$$

de donde

$$Y_n(s) = \frac{e^{-sa}}{(a_2s^2 + a_1s + a_0)}\frac{(1 - e^{-\frac{s}{n}})}{\frac{s}{n}}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1 - e^{-\frac{s}{n}})}{\frac{s}{n}} = 1,$$

haciendo tender $n \to \infty$ en la ultima ecuación, se obtiene

$$Y_\infty(s) = \frac{e^{-sa}}{(a_2s^2 + a_1s + a_0)}. \tag{4.16}$$

Notamos que este resultado se puede obtener también si tomamos T. de L. en ambos lados de (4.15), usamos que $\mathcal{L}(\delta_a) = e^{-sa}$, y suponemos que la igualdad se mantiene, se obtiene

$$(a_2s^2 + a_1s + a_0)Y(s) = e^{-sa},$$

de donde se sigue (4.16). Esto nos da un método formal para calcular el correspondiente Y_∞ en otros problemas de ecuaciones diferenciales con segundos miembros que contienen funciones δ, este método consiste en tratar esta función δ como una función ordinaria cuando se aplica T. de L. Aplicando Transformada inversa obtenemos $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_\infty(s))$. Finalmente hay que demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^a(t) = y(t)$.

Ejemplo 4.20. *Resolvamos*

$$y'' + ay = 4\delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Aplicando T. de L.:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = 4e^{-2s\pi}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\begin{aligned}
s^2Y(s) + 4Y(s) &= s + 4e^{-2s\pi} \\
Y(s) &= \frac{s + 4e^{-2s\pi}}{s^2+4} = \frac{s}{s^2+4} + \frac{4}{s^2+4}e^{-2s\pi} \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s\pi}}{s^2+4}\right) \\
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) &= \cos 2t \\
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s\pi}}{s^2+4}\right) &= \frac{1}{2}\sin 2(t-2\pi)U(t-2\pi),
\end{aligned}$$

de donde

$$y(t) = \cos 2t + 2\sin 2t\, U(t-2\pi).$$

Ejemplo 4.21. *Consideremos los dos problemas*

$$\begin{gathered}
my'' + k^2 y = 0 \\
y(0) = 0 \qquad y'(0) = v_0
\end{gathered}$$

y

$$\begin{gathered}
my'' + k^2 y = p_0\delta(t) \\
y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0.
\end{gathered}$$

Vamos a probar que ambos problemas tienen la misma solución si $p_0 = mv_0$. *La solución del primer problema es inmediata*

$$y(t) = A\sin\frac{k}{\sqrt{m}}t + B\cos\frac{k}{\sqrt{m}}t$$

que aplicando las condiciones iniciales nos da

$$y(t) = \frac{v_0\sqrt{m}}{k}\sin\frac{k}{\sqrt{m}}t.$$

Para encontrar la solución del segundo problema aplicamos T. de L.

$$ms^2Y(s) + k^2Y(s) = p_0$$

$$Y(s) = \frac{p_0}{ms^2+k^2} = \frac{p_0}{k\sqrt{m}}\frac{\frac{k}{\sqrt{m}}}{s^2 + (\frac{k}{\sqrt{m}})^2}. \tag{4.17}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

De aqui, usando que $p_0 = mv_0$, obtenemos

$$y(t) = \frac{p_0}{k\sqrt{m}} \sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right) = \frac{v_0\sqrt{m}}{k} \sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right).$$

4.7. Función de Transferencia.

Volvamos ahora al problema

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t) \tag{4.18}$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2, \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_n,$$

y donde g es una función que admite T. de L. , con

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \quad y \quad c_0, \ldots, c_n \text{ constantes reales.}$$

Vimos que aplicando la T. L. a ambos miembros nos daba

$$P(s)Y(s) + Q(s) = G(s).$$

donde

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

(polinomio característico) y $Q(s)$ es un polinomio de grado s^{n-1} en s, función de las condiciones iniciales. Despejando $Y(s)$, se obtiene

$$Y(s) = \frac{G(s) - Q(s)}{P(s)} = \frac{G(s)}{P(s)} - \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

Vamos a suponer que las condiciones iniciales son todas cero, esto implica que $Q(s) = 0$, por lo que

$$Y(s) = W(s)G(s),$$

donde $W(s) = \dfrac{1}{P(s)}$. La función W se llama función de transferencia. Si ponemos

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}(W(s))$$

entonces

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = (w * g)(t) = \int_0^t w(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{4.19}$$

Una notación corriente en Ingenieria es llamar a la función $g(t)$, función de entrada del sistema e $y(t)$ respuesta o salida del sistema. La función $w(t)$ se llama función peso del sistema y depende solamente de los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$. En este contexto (4.19) se llama la formula de Duhamel.

Volvamos ahora a la formula

$$Y(s) = W(s)G(s),$$

y supongamos que $G(s) = 1$, entonces

$$Y(s) = W(s), \tag{4.20}$$

que corresponde a la T. de L. de la respuesta $y(t) = w(t) = \mathcal{L}^{-1}(W(s))$ del siguiente problema

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = \delta(t) \tag{4.21}$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = 0. \tag{4.22}$$

Es por esto que $w(s)$ también se le llama la respuesta a un impulso unitario.

Miremos ahora el siguiente problema. Supongamos que sabemos que un fenómeno de Ingenieria es modelado por una ecuación de la forma (4.18), pero no conocemos las constantes $a_0, \cdots, a_n$. La pregunta es si se puede determinar la función peso del sistema por medio de excitaciones convenientes. Procedemos de la siguiente forma: tomamos $g(t) = U(t)$, y consideremos el siguiente problema

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = U(t)$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Sabemos que en este caso $G(s) = \mathcal{L}(U(t)) = \dfrac{1}{s}$ y por lo tanto

$$Y_U(s) = \frac{W(s)}{s}.$$

Tomando transformada inversa y llamando $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_U(s))$ la respuesta a la excitación $U(t)$ se tiene

$$h(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau,$$

y por lo tanto $w(t) = h'(t)$, quedando entonces determinada la función peso si se conoce $h'(t)$.

Con esto, de (4.19), la respuesta a una función g general es dada por

$$y(t) = \int_0^t h'(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Ejemplo 4.22. *Sea $f : [0,\infty) \mapsto \infty$ definida por*

$$f(t) = n \quad si \quad n-1 < t \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Encuentre la T. de L. de esta función y después resuelva la ecuación

$$y'' + k^2 y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Empecemos evaluando la T. de L. de f. Se tiene que esta función se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U(t-n).$$

Aplicando T. de L. se tiene

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(U(t-n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-sn}}{s} = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn}.$$

Sea $S = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn}$, entonces

$$e^{-s}S = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s(n+1)},$$

y por lo tanto

$$S - e^{-s}S = 1,$$

de donde

$$S = \frac{1}{1-e^{-s}},$$

y finalmente

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s(1-e^{-s})}.$$

Para resolver la ecuación diferencial usamos T. de L.. Se tiene

$$(s^2+k^2)Y(s) = \frac{1}{s(1-e^{-s})},$$

de donde

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+k^2)(1-e^{-s})} = \frac{1}{(s^2+k^2)}\frac{1}{s(1-e^{-s})} = \frac{1}{k}\mathcal{L}(\sin kt)\mathcal{L}(f(t)).$$

Tomando transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\sin(k(t-\tau))d\tau.$$

Reemplazando la serie para $f(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{1}{k}\int_0^t \sin(k(t-\tau))\sum_{n=0}^{\infty} U(\tau-n)d\tau$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t \sin(k(t-\tau))U(\tau-n)d\tau.$$

Termine este problema evaluando la integral y dando una formula para $y(t)$.

Vamos a resolver este problema de otra forma, para ilustrar nuestros métodos. Considerando el problema

$$w'' + k^2 w = \delta(t), \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 0,$$

sabemos de (4.17) que la T. de L. es

$$W(s) = \frac{1}{s^2+k^2},$$

de donde

$$w(t) = \frac{1}{k}\sin kt.$$

De aquí y de la formula de Duhamel

$$y(t) = \frac{1}{k}\int_0^t \sin k\tau f(t-\tau)d\tau = \frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

y hemos vuelto a la formula obtenida antes.

Ejemplo 4.23. *Consideremos el siguiente problema*

$$y' = \delta(t-a), \quad y(0) = 0, \quad a \geq 0.$$

Aplicando T. de L.

$$sY(s) = e^{-sa},$$

de donde

$$Y(s) = \frac{e^{-sa}}{s}.$$

Tomando transformada inversa

$$y(t) = U(t-a).$$

Formalmente

$$\frac{d}{dt}U(t-a) = \delta(t-a).$$

Esta formula no tiene sentido aquí, pero si en teoría de distribuciones. Sin embargo si uno aplica T. de L. a ambos miembros obtiene una identidad.

A manera de introducción a nuestra próxima sección consideremos el siguiente problema.

Ejemplo 4.24. *Resuelva, usando T. de L., el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x_1' &= 10x_1 - 5x_2 \\ x_2' &= 8x_1 - 12x_2. \end{aligned}$$

Aplicamos T. de L. a cada ecuación

$$\mathcal{L}(x_1'(t)) = sX_1(s) - x_1(0) = 10X_1(s) - 5X_2(s)$$

$$\mathcal{L}(x_2'(t)) = sX_2(s) - x_2(0) = 8X_1(s) - 12X_2(s),$$

que se escribe como

$$\begin{aligned}(s-10)X_1(s) + 5X_2(s) &= x_1(0)\\ -8X_1(s) + (s+12)X_2(s) &= x_2(0).\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$X_1(s) = \frac{(s+12)x_1(0) - 5x_2(0)}{(s-10)(s+12)+40},$$

$$X_2(s) = \frac{8x_1(0) + (s-10)x_2(0)}{(s-10)(s+12)+40}.$$

Notando que $(s-10)(s+12)+40 = s^2+2s-80 = (s-8)(s+10)$ *el sistema lo podemos escribir como*

$$X_1(s) = \frac{x_1(0)(s+12)}{(s-8)(s+10)} - \frac{5x_2(0)}{(s-8)(s+10)},$$

$$X_2(s) = \frac{8x_1(0)}{(s-8)(s+10)} + \frac{x_2(0)(s-10)}{(s-8)(s+10)}.$$

Usando fracciones parciales

$$X_1(s) = x_1(0)(\frac{10}{9(s-8)} - \frac{1}{9(s+10)}) - \frac{5x_2(0)}{18}(\frac{1}{s-8} - \frac{1}{s+10}),$$

y agrupando

$$X_1(s) = \left(\frac{10x_1(0)}{9} - \frac{5x_2(0)}{18}\right)\frac{1}{s-8} - \left(\frac{x_1(0)}{9} - \frac{5x_2(0)}{18}\right)\frac{1}{s+10}.$$

Tomando transformada inversa

$$x_1(t) = \left(\frac{10x_1(0)}{9} - \frac{5x_2(0)}{18}\right)e^{8t} - \left(\frac{x_1(0)}{9} - \frac{5x_2(0)}{18}\right)e^{-10t}.$$

El resto de ejercicio.

4.8. Funcion Gama. La función Gama se define para $x > 0$ por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

No es muy dificil ver que esta función esta bien definida en el sentido que el límite

$$\Gamma(x) = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau t^{x-1}e^{-t}dt,$$

existe para cada $x > 0$, y se deja de ejercicio.

Vamos a ver que la función Γ generaliza a $n!$ para $n \in \mathbb{N}$. En efecto se tiene que satisface

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

Demostremos esto. Por definición

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau t^x e^{-t}dt.$$

Integrando por partes la expresión

$$\int_0^\tau t^x e^{-t}dt = -e^{-t}t^x\Big|_0^\tau + \int_0^\tau xt^{x-1}e^{-t}dt,$$

por lo que

$$\Gamma(x+1) = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau t^x e^{-t}dt = x\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).$$

Notando que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-t}dt = 1,$$

se sigue que

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1, \quad \Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad .... \quad ,$$

y por lo tanto

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{para todo entero} \quad n > 0.$$

Hay algunos valores importantes de la función Γ.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi},$$

ya que se sabe que

$$\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De aquí

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \text{etc.}$$

Notemos ahora que si en la definición de la función Γ hacemos el cambio $t = s\tau$, entonces

$$\Gamma(x) = s^x \int_0^\infty \tau^{x-1}e^{-s\tau}d\tau,$$

de donde para $x > 0$,

$$\mathcal{L}(t^{x-1}) = \frac{1}{s^x}\Gamma(x).$$

En particular, si $x = \dfrac{1}{2}$ se tiene

$$\mathcal{L}(t^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

Finalmente aunque la función Γ la definimos solamente para $x > 0$, la podemos extender a valores de x que no sean enteros negativos o cero, de la manera siguiente. Para $x \in (-1, 0)$ definimos

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x},$$

donde el lado derecho esta bien definido. Por esta misma fórmula definimos a continuación $\Gamma(x)$ para $x \in (-2, -1)$, y así sucesivamente para cada intervalo de la forma $(-n-1, -n)$, con n entero no negativo. En la Figura 10 se muestra el gráfico de la función Γ.

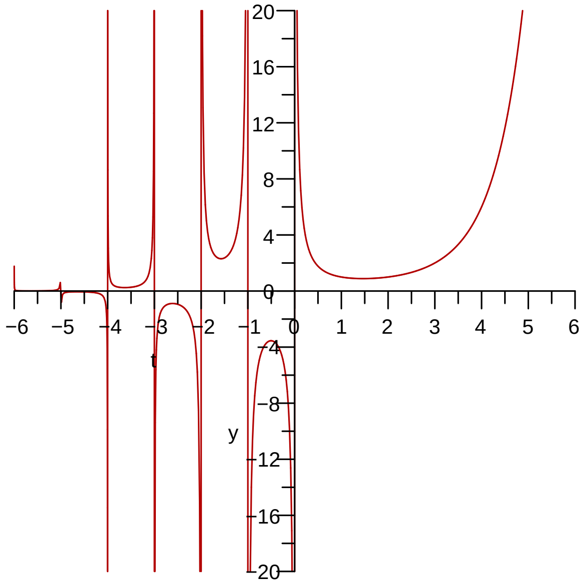

Figura 10. Función Gama

4.9. Ejercicios Resueltos.

Ejercicio 4.1. *Calcule* $f(t)$ *si* $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3 - 2s^2 - 8s}$.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Solución:

Por fracciones parciales resulta:

$$F(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2-2s-8)} = \frac{s^2+1}{s(s-4)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s+2}$$

$$F(s) = \frac{A(s^2-2s-8) + B(s^2+2s) + C(s^2-4s)}{s(s-4)(s+2)}$$

$$\Rightarrow \quad s^2(A+B+C) + s(-2A+2B-4C) - 8A = s^2+1$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

(1) $\quad -8A = 1$

(2) $\quad A - B + 2C = 0$

(3) $\quad A + B + C = 1$

Cuya solución es:

$$A = -\frac{1}{8} \quad ; \quad B = \frac{17}{24} \quad ; \quad C = \frac{5}{12}.$$

Entonces:

$$F(s) = -\frac{1}{8s} + \frac{17}{24(s-4)} + \frac{5}{12(s+2)}.$$

Aplicando transformada inversa de Laplace:

$$f(t) = -\frac{1}{8}Ł^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{17}{24}Ł^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} + \frac{5}{12}Ł^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$f(t) = \left(-\frac{1}{8} + \frac{17}{24}e^{4t} + \frac{5}{12}e^{-2t}\right)U(t).$$

Ejercicio 4.2. *Calcule las siguientes transformadas inversas de Laplace:*

(a) $\quad L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}$, $a^2 \neq b^2$.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

(b) $$L^{-1}\left\{\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}\right\}.$$

Solución:

(a) Por fracciones parciales:

$$F(s)=\frac{As+B}{(s^2+a^2)}+\frac{Cs+D}{(s^2+b^2)}=\frac{(As+B)(s^2+b^2)+(Cs+D)(s^2+a^2)}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$$

(1) $A+C=0$

(2) $Asb^2+Csa^2=s \quad \Leftrightarrow \quad Ab^2+Ca^2=1$

(3) $Bs^2+Ds^2=0$

(4) $Bb^2+Da^2=0$

$$A=\frac{1}{(b^2-a^2)} \quad ; \quad B=0 \quad ; \quad C=\frac{1}{(a^2-b^2)} \quad ; \quad D=0$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}=Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(b^2-a^2)(s^2+a^2)}\right\}+Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(a^2-b^2)(s^2+b^2)}\right\}$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}=\frac{1}{(b^2-a^2)}Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)}\right\}+\frac{1}{(a^2-b^2)}Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+b^2)}\right\}$$

finalmente

$$Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}=\frac{1}{(b^2-a^2)}\cos(at)+\frac{1}{(a^2-b^2)}\cos(bt).$$

(b) Por fracciones parciales:

$$\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{Bs+C}{(s^2+2s+5)}$$

$$\Rightarrow A(s^2+2s+5)+(Bs+C)(s-1)=5s+3,$$

(1) $A+B=0$

(2) $2A-B+C=5$

(3) $\quad 5A - C = 3.$

$$A = 1 \qquad B = -1 \qquad C = 2.$$

al reemplazar:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{2-s}{s^2+2s+5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{2}{s^2+2s+5} - \frac{s}{s^2+2s+5}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s+1)^2+2^2} - \frac{s+1-1}{(s+1)^2+2^2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s+1)^2+2^2} - \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right\}$$

$$= e^t + e^{-t}\sin(2t) - e^{-t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t) = e^t + \frac{3}{2}e^{-t}\sin(2t) - e^{-t}\cos(2t).$$

Ejercicio 4.3. *Sea $H(t)$ una función igual a t cuando $0 < t \leq 4$ e igual a 5 cuando $t > 4$. Obtenga $\text{Ł}\{H(t)\}$ por definición y usando escalón unitario.*

Solución:

(1) Aplicando la definición de transformada de Laplace:

$$\text{Ł}\left\{H(t)\right\} = \int_0^\infty H(t)e^{-st}dt = \int_0^4 te^{-st}dt + \int_4^\infty 5e^{-st}dt$$

$\int te^{-st}dt = -\frac{te^{-st}}{s} + \int \frac{e^{-st}}{s}dt = -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}$

$u = t \Rightarrow du = dt; \qquad dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = -\frac{e^{-st}}{s}$

$$\text{Ł}\left\{H(t)\right\} = \left(-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)_0^4 + 5\left(-\frac{e^{-st}}{s^2}\right)_4^\infty = \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s^2}$$

(2) Usando escalón unitario:

$$H(t) = tU(t) - (t-5)U(t-4) + U(t-4)$$

$$H(s) = \text{Ł}\left\{H(t)\right\} = \text{Ł}\left\{tU(t)\right\} - \text{Ł}\left\{(t-4)U(t-4)\right\} + \text{Ł}\left\{U(t-4)\right\} = \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s^2}.$$

Ejercicio 4.4. *(i) Calcule las transformadas inversas de Laplace en los siguientes casos:*

(a) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+s-20}\right\}$.

(b) $L^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{s^2(s^2+1)}\right\}$.

(ii) Calcule las siguientes transformadas de Laplace:

(a) $L\left\{e^t cos(3t)\right\}$.

(b) $L\left\{t^2 cos^2(t)\right\}$.

Solución:

(i) (a)

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-20}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{A}{s+5}+\frac{B}{s-4}\right\}=AL^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}+BL^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}$$

$$=-\frac{1}{9}\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}+\frac{1}{9}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}=-\frac{1}{9}\cdot e^{-5t}+\frac{1}{9}\cdot e^{4t}$$

(i) (b)

$$L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2(s^2+1)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+1}\right\}$$

$$=AL^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+BL^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+CL^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+DL^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$=1-t-\cos(t)+\sin(t)$$

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=-1,\quad D=1.$$

(ii) (a)

Por trigonometria

$$\cos^2(x)=\frac{\cos 2x+1}{2}$$

$$\Longrightarrow L\left\{e^t cos(3t)\right\}=L\left\{e^t(cos6t+1)\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(L\{e^t cos6t\}+L\{e^t\}\right)$$

$$L\{e^t cos(3t)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+36}+\frac{1}{s-1}\right)$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

(ii) (b)

$$L\left\{t^2cos^2(t)\right\} = L\left\{t^2(cos2t+1)\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(L\{t^2cos2t\}+L\{t^2\}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((-1^2)\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)+\frac{2}{s^3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+4-2s^2}{(s^2+4)^2}\right)+\frac{2}{s^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-2s(s^2+4)^2-4s(s^2+4)(4-s^2)}{(s^2+4)^4}+\frac{2}{s^3}\right) = \frac{-s(s^2+4+8-2s^2)}{(s^2+4)^3}+\frac{1}{s^3}$$

$$L\{t^2cos^2(t)\} = s\frac{(s^2-12)}{(s^2+4)^3}+\frac{1}{s^3}$$

Ejercicio 4.5. *Ocupando transformada de Laplace resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

$$x''+k^2x = f(t), \quad k>0, \quad x(0)=x'(0)=0$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} U(t-i).$$

<u>Solución:</u>

Se asume que la transformada de Laplace de la Serie es la Serie de las transformadas de Laplace:

$$Ł\{f(t)\} = Ł\left\{\sum_{i=0}^{\infty} U(t-i)\right\} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{-is}}{s} = \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{\infty}\left(e^{-s}\right)^i$$

Recordando la suma geométrica:

$S_T = a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^n$

$aS_T = a^1 + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n+1}$

luego

$$S_T = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \Rightarrow \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{\infty}\left(e^{-s}\right)^i = \frac{1}{s}\lim_{n\to\infty}\frac{1-(e^{-s})^{n+1}}{1-e^{-s}}$$

$$\Rightarrow \quad Ł\{f(t)\} = \frac{1}{s(1-e^{-s})}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Ahora se aplica transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$$Ł\{x''\} + k^2 Ł\{x\} = Ł\{f(t)\}$$

sea $X(s) = Ł\{x(t)\}$, luego

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + k^2 X(s) = \frac{1}{s(1-e^{-s})}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s^2+k^2)s(1-e^{-s})} = \frac{1}{k}\frac{k}{(s^2+k^2)s(1-e^{-s})}.$$

Se conocen las transformadas de Laplace:

$$Ł^{-1}\left\{\frac{1}{s(1-e^{-s})}\right\} = f(t) = \sum_{0}^{\infty} U(t-i)$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \sin(kt)$$

Ahora se aplica el teorema de Convolución:

$$Ł^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$x(t) = \frac{1}{k}\int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} U(\tau - i)\sin(k(t-\tau))d\tau = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^t U(\tau-i)\sin(k(t-\tau))d\tau$$

$$x(t) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\int_i^t \sin(k(t-\tau))d\tau\right)U(t-i) = \frac{1}{k^2}\sum_{i=0}^{\infty}(-1+\cos(k(t-i)))U(t-i)$$

$$x(t) = \frac{1}{k^2}\sum_{i=0}^{\infty}(-1+\cos(k(t-i)))U(t-i).$$

Ejercicio 4.6. *Usando transformada de Laplace resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.*

$$x_1' = x_1 - x_2 + e^t\cos(t)$$
$$x_2' = x_1 + x_2 + e^t\sin(t)$$
$$x_1(0) = 0 \qquad x_2(0) = 0$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Solución:

Se aplica transformada de Laplace a ambas ecuaciones. Sea $X_1(s) = Ł\{x_1(t)\}$ y $X_2(s) = Ł\{x_2(t)\}$. Entonces se cumple:

$$sX_1(s) - x_1(0) = X_1(s) - X_2(s) + \frac{(s-1)}{(s-1)^2+1}$$
$$sX_2(s) - x_2(0) = X_1(s) + X_2(s) + \frac{1}{(s-1)^2+1}$$

Aplicando las condiciones iniciales y escribiendo el problema como un sistema de ecuaciones algebraicas resulta:

$$\begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} \\ \frac{1}{(s-1)^2+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{((s-1)^2+1)^2} \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s-1) \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{((s-1)^2+1)^2} \begin{bmatrix} (s-1)^2-1 \\ 2(s-1) \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$X_1(s) = \frac{(s-1)^2-1}{((s-1)^2+1)^2}, \quad X_2(s) = \frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}$$

Ahora se calculan las transformadas inversas:

$$x_1(t) = Ł^{-1}\left\{\frac{(s-1)^2-1}{((s-1)^2+1)^2}\right\} = e^t Ł^{-1}\left\{\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right\} = e^t Ł^{-1}\left\{\frac{-d(\frac{s}{(s^2+1)})}{ds}\right\}$$
$$x_1(t) = e^t t Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\} = e^t t\cos(t).$$

Lo mismo para $x_2(t)$

$$x_2(t) = Ł^{-1}\left\{\frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}\right\} = e^t Ł^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\} = e^t Ł^{-1}\left\{\frac{-d\left(\frac{1}{(s^2+1)}\right)}{ds}\right\}$$
$$x_2(t) = e^t t Ł^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\} = e^t t\sin(t).$$

Finalmente la solución del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t t\cos(t) \\ e^t t\sin(t) \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4.7. *Resuelva el siguiente sistema con condiciones iniciales.*

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \delta(t-\omega) + U(t-2\omega) - U(t-3\omega) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X(0) = 0$$

<u>Solución:</u>

Se aplica transformada de Laplace a ambas ecuaciones. Sea $X_1(s) = Ł\{x_1(t)\}$ y $X_2(s) = Ł\{x_2(t)\}$. Entonces se cumple:

$$sX_1(s) - x_1(0) = \omega X_2(s) + e^{-\omega s} + \frac{1}{s}e^{-2\omega s} - \frac{1}{s}e^{-3\omega s}$$

$$sX_2(s) - x_2(0) = -\omega X_1(s)$$

Aplicando las condiciones iniciales y escribiendo el problema como un sistema de ecuaciones algebraicas resulta:

$$\begin{bmatrix} s & -\omega \\ \omega & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\omega s} + \frac{1}{s}e^{-2\omega s} - \frac{1}{s}e^{-3\omega s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+\omega^2} \begin{bmatrix} s & \omega \\ -\omega & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\omega s} + \frac{1}{s}e^{-2\omega s} - \frac{1}{s}e^{-3\omega s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+\omega^2} \begin{bmatrix} se^{-\omega s} + e^{-2\omega s} - e^{-3\omega s} \\ -\omega e^{-\omega s} + \frac{-\omega}{s}(e^{-2\omega s} - e^{-3\omega s}) \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$X_1(s) = \frac{se^{-\omega s}}{s^2+\omega^2} + \frac{e^{-2\omega s} - e^{-3\omega s}}{s^2+\omega^2}$$

$$X_2(s) = \frac{-\omega e^{-\omega s}}{s^2+\omega^2} - \frac{\omega(e^{-2\omega s} - e^{-3\omega s})}{s(s^2+\omega^2)}$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{se^{\omega s}}{s^2+\omega^2}\right\} = U(t-\omega)f(t-\omega) = U(t-\omega)\cos(\omega(t-\omega))$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \rightarrow f(t) = \cos\omega t$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{\omega(e^{-2\omega s}-e^{-3\omega s})}{(s^2+\omega^2)}\right\}\frac{1}{\omega}$$
$$=\frac{1}{\omega}[U(t-2\omega)\sin(\omega(t-2\omega))-U(t-3\omega)\sin(\omega(t-3\omega))]$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{\omega e^{-\omega s}}{s^2+\omega^2}\right\}=-U(t-\omega)\sin(\omega(t-\omega))$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{\omega}{s(s^2+\omega^2)}\right\}=Ł^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+\omega^2}\right\}=Ł^{-1}\left\{\frac{As^2+A\omega^2+Bs^2+Cs}{s(s^2+\omega^2)}\right\}$$
$$C=0\longrightarrow A=\frac{1}{\omega}\longrightarrow A+B=0\longrightarrow B=-\frac{1}{\omega}$$
$$Ł^{-1}\left\{\frac{1}{\omega s}-\frac{1}{\omega}\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\}=\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega}\cos\omega t=f(t)$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{\omega(e^{-2\omega s}-e^{-3\omega s})}{(s(s^2+\omega^2))}\right\}=U(t-2\omega)\left[\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega}\cos\omega(t-2\omega)\right]-U(t-3\omega)\left[\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega}\cos(\omega(t-3\omega))\right]$$

Finalmente las soluciones son:

$$x(t)=U(t-\omega)\cos(\omega(t-\omega))+\frac{1}{\omega}\left[U(t-2\omega)\sin(\omega(t-2\omega))-U(t-3\omega)\sin(\omega(t-3\omega))\right]$$

$$y(t)=-U(t-\omega)\sin(\omega(t-\omega))+\frac{1}{\omega}\left[U(t-2\omega)(1-\cos(\omega(t-2\omega))-U(t-3\omega)(1-\cos(\omega(t-3\omega)))\right].$$

Ejercicio 4.8. *(i) Dibuje la función e(t)dada por:*

$$e(t)=t-j\quad ,para\quad j\leq t<j+1,\qquad j\in\{0\}\cup N$$

Demuestre que su transformada de Laplace es dada por:

$$\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{e^{-s}-1}\right)$$

(ii) Considere ahora el circuito electrico RLC en serie

El voltaje $v(t)$ en el condensador C satisface la ecuación diferencial

$$C\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{RC}{L}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}v=\frac{e(t)}{L}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Calcule el voltaje $v(t)$por el condensador de la corriente $i(t) = C\frac{dv}{dt}(t)$, si la entrada de voltaje $e(t)$ esta dado por la función de la parte (i), y las condiciones iniciales son $v(0) = v_0, i(0) = i_0$
Las constantes quedan dadas por $LC = 1, RC = 2$.

<u>Solución:</u>

(i)

$$V_i(t) = t - U(t-1) - U(t-2) - \ldots - U(t-i) - \ldots$$

$$V_i(t) = t - \sum_{i=1}^{\infty} U(t-i)$$

$$L\left\{V_i(t)\right\} = L\{t\} - L\left\{\sum_{i=1}^{\infty} U(t-i)\right\}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \sum_{i=1}^{\infty} e^{-si}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{\infty}(e^{-s})^i = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{1-e^{-s}}\right)$$

(ii)

$$LCv'' + RCv' + v = v_i$$
$$v'' + 2v' + v = v_i \setminus L$$
$$s^2V(s) - sv(0) - v'(0) + 2sV(s) - 2v(0) + V(s) = V_i(s)$$
$$V(s) = \frac{v_0}{s+1} + \frac{v_0 + v'(0)}{(s+1)^2} + \frac{v_i(s)}{(s+1)^2}$$
$$v'(0) = \frac{1}{C}i_0$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t} \qquad ; \qquad L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = e^{-t}t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{V_i}{s+1}\right\} = \int_0^t V_i(\tau)e^{-(t-\tau)}(t-\tau)d\tau = V_3(t)$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0e^{-t} + \left(v_0 + \frac{1}{C}\cdot i_0\right)te^{-t} + \underbrace{\int_0^t V_i(\tau)e^{-(t-\tau)}(t-\tau)d\tau}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0e^{-t} + \left(v_0 + \frac{1}{C}\cdot i_0\right)te^{-t} + V_3(t)$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$i(t) = i_0 \cdot e^{-t} - (C \cdot v_0 + i_0)te^{-t} + \frac{dV_3}{dt}$$

$$\frac{dV_3}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\left(-t\int_0^t V_i(\tau)e^{\tau}d\tau - \int_0^t V_i(\tau)e^{\tau}\tau d\tau\right)\right)$$

$$\frac{dV_3}{dt} = e^{-t}\left(-t\int_0^t V_i(\tau)e^{\tau}d\tau + \int_0^t (1-\tau)e^{\tau}V_i(\tau)d\tau\right)$$

$$i(t) = i_0 \cdot e^{-t} - (C \cdot v_0 + i_0)te^{-t} + e^{-t}\left(\int_0^t (1-\tau)e^{\tau}V_i(\tau)d\tau - t\int_0^t V_i(\tau)e^{\tau}d\tau\right)$$

Otra forma:

$$L\left\{V_i(t)\right\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{\infty}(e^{-s})^i$$

$$L^{-1}\left\{\frac{V_i(s)}{(s+1)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2}\sum_{i=1}^{\infty}e^{-si}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{-2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2} - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+1)^2}\right)e^{-si}\right\}$$

$$= \left(-2 + t + 2e^{-t} + te^{-t}\right) - \sum_{i=1}^{\infty}\left(1 - e^{-(t-i)} - (t-i)e^{-(t-i)}\right)U(t-i)$$

$$v(t) = -2+t+(2+v_0)e^{-t}+\left(1 + v_0 + \frac{i_0}{C}\right)te^{-t}-\sum_{i=1}^{\infty}\left(1 - e^{-(t-i)} - (t-i)e^{-(t-i)}\right)U(t-i)$$

$$i(t) = C + (i_0 - 2C)e^{-t} - (C + v_0C + i_0)te^{-t}$$

$$-\sum_{i=1}^{\infty}\left[(t-i)e^{-(t-i)}U(t-i) + \left(1 + (t+1-i)e^{-(t-i)}\delta(t-i)\right)\right]$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Ejercicio 4.9. *Encuentre la transformada inversa de las siguientes funciones:*

(a) $L^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)^2}{(s+2)^4}\right\}$

(b) $L^{-1}\left\{ln\left(\dfrac{s^2+1}{s^2+4}\right)\right\}$

(c) $L^{-1}\left\{\dfrac{sF(s)}{s^2+4}\right\}$

Suponga que $f(t) = L^{-1}(F(s))$.

<u>Solución:</u>

(a) Fracciones Parciales :

$$\frac{(s+1)^2}{(s+2)^4} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{(s+2)^3} + \frac{D}{(s+2)^4}$$
$$A(s+2)^3 + B(s+2)^2 + C(s+2) + D = s^2 + 2s + 1$$

$$A(s^3 + 6s^2 + 12s + 8) + B(s^2 + 4s + 4) + C(s+2) + D = s^2 + 2s + 1$$

$$A = 0 \longrightarrow B = 1 \longrightarrow C = -2 \longrightarrow D = 1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{(s+1)^2}{(s+2)^4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^4}\right\}$$
$$= te^{-2t} - 2t^2\frac{e^{-2t}}{2} + t^3\frac{e^{-2t}}{6}$$
$$L^{-1}\left\{\frac{(s+1)^2}{(s+2)^4}\right\} = te^{-2t}\left[1 - t + \frac{t^2}{6}\right]$$

(b)

$$L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)\right\} = L^{-1}\left\{\ln\left(s^2+1\right)\right\} - L^{-1}\left\{\ln\left(s^2+4\right)\right\}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$L(f(t)) = F(s) = \left\{\ln\left(s^2+1\right)\right\} \qquad L(g(t)) = G(s) = \left\{\ln\left(s^2+4\right)\right\}$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{2s}{s^2+1} \qquad \frac{dG(s)}{ds} = \frac{2s}{s^2+4}$$

$$\rightarrow 2L^{-1}\left\{F'(s)\right\} = 2\cos t \qquad \rightarrow 2L^{-1}\left\{G'(s)\right\} = 2\cos 2t$$

Además que:

$$-L\left\{tf(s)\right\} = \frac{2s}{s^2+1} \qquad /L^{-1}()$$

$$-tf(t) = 2\cos t \quad \Rightarrow \quad f(t) = -\frac{2}{t}\cos t$$

$$-L\left\{tg(s)\right\} = \frac{2s}{s^2+4} \qquad /L^{-1}()$$

$$f(t) = -\frac{2}{t}\cos 2t$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)\right\} = \frac{2}{t}[\cos(2t) - \cos(t)]$$

(c)

$$L^{-1}\left\{\frac{sF(s)}{s^2+4}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t$$

$$L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$$

Por teorema de convolución

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{sF(s)}{s^2+4}\right\} = \int_o^t f(t-\beta)\cos 2\beta d\beta$$

Ejercicio 4.10. *Usando transformada de Laplace resuelva los siguientes problemas.*

(i) Encuentre la solución de:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = \omega_0\left[1 - U\left(x - \frac{L}{2}\right)\right]$$

que satisface $y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y(L) = y''(L) = 0.$

Aqui E, I, ω_0 son constantes positivas y $L > 0$.

(ii) Encuentre la solución de:

$$y'' - 7y' + 6y = e' + \delta(t - 10\pi) + \delta(t - 20\pi)$$
$$y(0) = y'(0) = 0$$

<u>Solución:</u>

(i)

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = \omega_0\left[1 - U\left(x - \frac{L}{2}\right)\right] \qquad /L()$$

$$EIL(y^{(iv)}) = \omega_0 L(1) - \omega_0 L\left(U\left(x - \frac{L}{2}\right)\right)$$

Sea $F(s) = L(y(x))$

$$EI\left[s^4F(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)\right] = \frac{\omega_0}{s} - \omega_0\frac{e^{-\frac{L}{2}s}}{s}$$

Sea $y''(0) = C_1 \qquad y'''(0) = C_2$

$$s^4F(s) - sC_1 - C_2 = \frac{\omega_0}{EIs}\left[1 - e^{-\frac{L}{2}s}\right]$$

$$s^4F(s) = \frac{\omega_0}{EI}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-\frac{L}{2}s}}{s}\right] + sC_1 + C_2$$

$$F(s) = \frac{\omega_0}{EI}\left[\frac{1}{s^5} - \frac{e^{-\frac{L}{2}s}}{s^5}\right] + \frac{C_1}{s^3} + \frac{C_2}{s^4} \qquad /L^{-1}()$$

$$y(x) = \frac{\omega_0}{EI}\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{L}{2}s}}{s^5}\right\}\right] + C_1L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} + C_2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$$

$$\rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!}L^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{x^4}{24}$$

$$\rightarrow L^{-1}\left\{e^{-\frac{L}{2}s}\frac{1}{s^5}\right\} = U\left(x - \frac{L}{2}\right)G\left(x - \frac{L}{2}\right) = U\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^4}{24}$$

$$\rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{1}{3!}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = \frac{x^2}{2}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\to L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{1}{6}L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} = \frac{x^3}{6}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{\omega_0}{EI}\left[\frac{x^4}{24} - \frac{\left(x-\frac{L}{2}\right)^4}{24}U\left(x-\frac{L}{2}\right)\right] + C_1\frac{x^2}{2} + C_2\frac{x^3}{6}$$

Evaluando en L:

$$y(L) = 0 = \frac{\omega_0}{EI}\left[\frac{L^4}{24} - \frac{L^4}{16\cdot 24}\right] + C_1\frac{L^2}{2} + C_2\frac{L^3}{6}$$

$$0 = \frac{\omega_0}{EI}\left[\frac{L^2}{12} - \frac{L^2}{16\cdot 12}\right] + C_1 + \frac{C_2 L}{3}$$

$$0 = \frac{5}{64}\frac{\omega_0}{EI}L^2 + C_1 + \frac{C_2 L}{3}$$

$$y'(x) = \frac{\omega_0}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{1}{24}\left[4\left(x-\frac{L}{2}\right)^3 U\left(x-\frac{L}{2}\right) + \left(x-\frac{L}{2}\right)^4 \delta\left(\frac{L}{2}-x\right)\right]\right) + C_1 x + C_2\frac{x^2}{2}$$

$$y''(x) = \frac{\omega_0}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{24}\left[12\left(x-\frac{L}{2}\right)^2 U\left(x-\frac{L}{2}\right) + 4\left(x-\frac{L}{2}\right)^3 \delta\left(\frac{L}{2}-x\right)\right]\right)$$

$$+\frac{\omega_0}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{24}\left[4\left(x-\frac{L}{2}\right)^3 \delta\left(\frac{L}{2}-x\right) + \left(x-\frac{L}{2}\right)^4 \left(\delta\left(\frac{L}{2}-x\right)\right)'\right]\right)$$

$$+C_1 x + C_2\frac{x^2}{2}$$

$$y''(L) = \frac{\omega_0}{EI}\left(\frac{L^2}{2} - \frac{1}{24}\left[12\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\right) + C_1 + C_2 L = 0$$

Tomando en cuenta que:

$$\delta\left(\frac{L}{2}-x\right) = 0 \qquad para \quad x = L$$

Se comportan igual:

$$\left(\delta\left(\frac{L}{2}-x\right)\right)' = 0 \qquad para \quad x = L$$

$$\left(U\left(x-\frac{L}{2}\right)\right)' = \delta\left(\frac{L}{2}-x\right)$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\Rightarrow \frac{3}{8}\frac{\omega_0}{EI}L^2 + C_1 + C_2 L = 0$$
$$\Rightarrow \frac{5}{64}\frac{\omega_0}{EI}L^2 + C_1 + C_2\frac{L}{3} = 0$$

$$\frac{19}{64}\frac{\omega_0}{EI}L^2 + \frac{2}{3}C_2 L = 0$$

$$C_2 = -\frac{57}{128}\frac{\omega_0}{EI}L, \quad C_1 = \frac{9}{128}\frac{\omega_0}{EI}L^2.$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{\omega_0}{EI}\left[\frac{x^4}{24} - \frac{\left(x-\frac{L}{2}\right)^2}{24}U\left(x-\frac{L}{2}\right) + \frac{9}{256}L^2x^2 - \frac{19}{256}Lx^3\right]$$

(ii)

$$y'' - 7y' + 6y = e' + \delta(t-10\pi) + \delta(t-20\pi) \qquad /L$$

$$L(y'') - 7L(y') + 6L(y) = L(e') + L\left(\delta(t-10\pi)\right) + L\left(\delta(t-20\pi)\right)$$

Sea $F(s) = L(y)$

$$s^2F(s) + sy(0) + y'(0) - 7sF(s) - 7y(0) + 6F(s) = \frac{1}{s-1} + e^{-10\pi s} + e^{-20\pi s}$$
$$F(s)(s-1)(s-6) = \frac{1}{s-1} + e^{-10\pi s} + e^{-20\pi s}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s-6)} + \frac{e^{-10\pi s}}{(s-1)(s-6)} + \frac{e^{-20\pi s}}{(s-1)(s-6)} \qquad /L^{-1}()$$

Fracciones Parciales :

$$\frac{1}{(s-1)^2(s-6)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-6}$$
$$A(s^2+7s+6) + B(s-6) + C(s^2-2s+1) = 1$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\begin{array}{ccc} A + C = 0 & \rightarrow & A = -C \\ -7A + B - 2C = 0 & \rightarrow & 5A = B \\ 6A - 6B + C = 1 & \rightarrow & 6A - 30A - A = 1 \end{array}$$

$$A = -\frac{1}{25} \longrightarrow B = -\frac{1}{5} \longrightarrow C = \frac{1}{25}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s-6)}\right\} &= -\frac{1}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} - \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} + \frac{1}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\} \\ &= -\frac{1}{25}e^t - \frac{1}{5}te^t + \frac{1}{25}e^{6t} \end{aligned}$$

Fracciones Parciales :

$$\frac{1}{(s-1)(s-6)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-6}$$

$$A = -\frac{1}{5} \longrightarrow B = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-6)}\right\} &= -\frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\} \\ &= -\frac{1}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{6t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{e^{-10\pi s}}{(s-1)(s-6)}\right\} &= -\frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{e^{-10\pi s}}{s-1}\right\} + \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{e^{-10\pi s}}{s-6}\right\} \\ &= -\frac{1}{5}U(t-10\pi)e^{t-10\pi} + \frac{1}{5}U(t-10\pi)e^{6(t-10\pi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{e^{-20\pi s}}{(s-1)(s-6)}\right\} &= -\frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{e^{-20\pi s}}{s-1}\right\} + \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{e^{-20\pi s}}{s-6}\right\} \\ &= -\frac{1}{5}U(t-20\pi)e^{t-20\pi} + \frac{1}{5}U(t-20\pi)e^{6(t-20\pi)} \end{aligned}$$

$$y(t) = e^t\left(-\frac{1}{5}t - \frac{1}{25}\right) + \frac{1}{25}e^{6t} + \frac{1}{5}U(t-10\pi)\left(e^{6(t-10\pi)} - e^{t-10\pi}\right) + \frac{1}{5}U(t-20\pi)\left(e^{6(t-20\pi)} - e^{t-20\pi}\right)$$

Ejercicio 4.11. *Resuelva por medio de la transformada de Laplace el siguiente problema con condición:*

$$y'' - 4y' + 3y = 1 - U(t-2) - U(t-4) + U(t-6)$$
$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0$$

Solución:

$$y'' - 4y' + 3y = 1 - U(t-2) - U(t-4) + U(t-6) \qquad /L()$$

$$L(y'') - 4L(y') + 3L(y) = L(1) - L(U(t-2)) - L(U(t-4)) + L(U(t-6))$$

Sea $F(s) = L(y)$

$$s^2F(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sF(s) - y(0)) + 3F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s} + \frac{e^{-6s}}{s}$$

$$F(s)\left[s^2 + 4s + 3\right] = \frac{1}{s}\left[1 - e^{-2s} - e^{-4s} + e^{-6s}\right]$$

Calculemos

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+3)} \cdot \frac{1}{(s+1)}\right\}$$

$$AL^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + BL^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)}\right\} + CL^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}$$

$$A + Be^{-3t} + Ce^{-t}$$

$$A(s+3)(s+1) + Bs(s+1) + Cs(s+3) = 1$$

$$A = \frac{1}{3} \longrightarrow B = \frac{1}{6} \longrightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+3)} \cdot \frac{1}{(s+1)}\right\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s(s+3)(s+1)}\right\} = f(t-2)U(t-2) = -\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{-3(t-2)} - \frac{1}{2}e^{-(t-2)}\right]U(t-2)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s(s+3)(s+1)}\right\} = -\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}e^{-3(t-4)}-\frac{1}{2}e^{-(t-4)}\right]U(t-4)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{e^{-6s}}{s(s+3)(s+1)}\right\} = \left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}e^{-3(t-6)}-\frac{1}{2}e^{-(t-6)}\right]U(t-6).$$

Ejercicio 4.12. *Resuelva la siguiente edo:*

$$y''+4y'+13y=\delta(x-\pi)+\delta(x-3\pi)$$
$$y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=0.$$

Solución:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4(sY(s)-y(0))+13Y(s)=e^{-\pi s}+e^{-3\pi s}$$

$$Y(s)=\frac{(s+2)}{(s+2)^2+9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+9}\left(e^{-\pi s}+e^{-3\pi s}\right)$$

$$y(t)=e^{-2t}\cos 3t+\frac{2}{3}e^{-2t}\sin 3t+\frac{1}{3}\left(U(t-\pi)e^{-2(t-\pi)}\sin(3(t-\pi))+U(t-3\pi)\sin(3(t-3\pi))\right)$$

Ejercicio 4.13. *Considere el sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\frac{dr}{dt}=a\cdot m(t)-b\cdot r(t)+b\cdot h(t)$$
$$\frac{dh}{dt}=c\cdot r(t)-d\cdot h(t)$$
$$\frac{dm}{dt}=e\cdot q(t)-e\cdot m(t)$$
$$\frac{dq}{dt}=-f\cdot q(t)+f\cdot g(t)$$

a, b, c, d, e, y f son constantes positivas.

(a) Encuentre la función de transferencia $W(s)=\dfrac{H(s)}{G(s)}$.
(Observación: las condiciones iniciales son cero).

(b) Si se aplica $g(t)=4U(t)$, obtenga una salida del sistema $h(t)$.

Para la parte (b) use $a = b = c = d = e = f = 1$.

Solución:

(a) Se aplica transformada de Laplace a todas las ecuaciones del sistema, y se busca despejar $H(s)$ en función de $G(s)$, haciendo todas las condiciones iniciales nulas por tratarse de una función de transferencia.

(1) $SR(s) = aM(s) - bR(s) + bH(s)$
(2) $SH(s) = cR(s) - dH(s)$
(3) $SM(s) = eQ(s) - eM(s)$
(4) $SQ(s) = -fQ(s) + fG(s)$

$$(4) \quad \Rightarrow \quad Q(s) = \frac{fG(s)}{s+f}.$$

$$(3) \quad \Rightarrow \quad M(s) = \frac{eQ(s)}{s+e} = \frac{e \cdot f \cdot G(s)}{(s+e)(s+f)}.$$

$$(1) \quad \Rightarrow R(s) = \frac{a \cdot e \cdot f \cdot G(s)}{(s+b)(s+e)(s+f)} + \frac{bH(s)}{s+b}.$$

Entonces la función de transferencia es:

$$\frac{H(s)}{G(s)} = \frac{a \cdot e \cdot f \cdot c}{(s+e)(s+f)((s+d)(s+b) - c \cdot b)}$$

(b) Se tiene que:

$$g(t) = 4U(t) \Rightarrow G(s) = \frac{4}{s}$$

$$H(s) = \frac{G(s)}{(s+1)^2(s^2+2s)} = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)s^2} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+2)} + \frac{D}{s} + \frac{E}{s^2}$$

$$H(s) = \frac{4}{s+1} + \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2} + \frac{-5}{s} + \frac{2}{s^2}$$

$$h(t) = 4(1+t)e^{-t} + e^{-2t} + 2t - 5.$$

Ejercicio 4.14. *Encuentre la solución del problema con condiciones iniciales nulas $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.*

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish),
Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$x'' + k^2 x = k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \delta\left(t - \frac{n\pi}{k}\right).$$

A continuación, encontrar la solución si $t \in \left[\frac{(n-1)\pi}{k}, \frac{n\pi}{k}\right]$.

Solución:

$$x(s) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{k}{s^2+k^2} \cdot e^{-\frac{n\pi}{k}s} \quad \Rightarrow x(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot U\left(t - \frac{n\pi}{k}\right)\sin\left(k\left(t - \frac{n\pi}{k}\right)\right)$$

si $t \in \left[\frac{(i-1)\pi}{k}, \frac{j\pi}{k}\right] \Rightarrow U\left(t - \frac{n\pi}{k}\right) = 1 \quad , \quad n = 0, 1, \ldots, j-1$

$$U\left(t - \frac{n\pi}{k}\right) = 0 \quad , \quad n = j, \ldots, \infty$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{n=0}^{j-1}\sin(kt - n\pi)$$

Ejercicio 4.15. *Considere la ecuación diferencial:*

$$ay' + y = b \cdot f(t-c)$$
$$y(0) = 0$$

$a > 0 \quad , b > 0 \quad , c > 0 \quad , c \ll 1$ *constantes*

(a) Sea $f(t) = \delta(t)$ *la función delta de Dirac. Encuentre* $y(t)$ *y grafique.*

(b) Sea $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\delta(t-i)$. *Encuentre* $y(t)$ *y grafique.*

(c) Para la solución de la parte (b) evalúe $y(N+c)$ *con* $N \in N$. *Indique las condiciones necesarias para que* $y(N+c)$ *converja cuando* $N \to \infty$, *y demuestre que cuando converje:*

$$\lim_{N\to\infty} y(N+c) = b\left(1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{a}} - 1}\right)$$

(d) Sea $f(t) = U(t)$ *el escalón unitario. Encuentre* $y(t)$ *y bosqueje.*

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

(e) *Sea* $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} U(t-i)$. *Encuentre* $y(t)$ *y bosqueje.*

Solución:

(a) $ay' + y = b \cdot f(t-c) \quad , \quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \dfrac{be^{-cs}}{as+1} F(s).$

$$f(t) = \delta(t) \Rightarrow F(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{be^{-cs}}{as+1} = \frac{\frac{b}{a}e^{-cs}}{s+\frac{1}{a}} \Rightarrow y(t) = \frac{b}{a} \cdot e^{-\frac{1}{a}(t-c)} U(t-c)$$

pues

$$L^{-1}\left\{\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{a}}\right\} = \frac{b}{a} \cdot e^{-\frac{1}{a}t} \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{a}} \cdot e^{-cs}\right\} = \frac{b}{a} \cdot e^{-\frac{1}{a}(t-c)} U(t-c).$$

(b) $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(t-i) \Rightarrow F(s) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-is}$.

$$Y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b \cdot e^{-(i+c)s}}{as+1} \Rightarrow y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b}{a} \cdot e^{-\frac{1}{a}(t-i-c)} \cdot U(t-i-c).$$

(c)

$$y(N+c) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b}{a} \cdot e^{-\frac{1}{a}(N-i)} \cdot U(N-i) = \sum_{i=0}^{N} \frac{b}{a} \cdot e^{-\frac{1}{a}(N-i)} = \frac{b}{a} \cdot e^{-\frac{N}{a}} \sum_{i=0}^{N} \left(e^{\frac{1}{a}}\right)^{i}$$

$$y(N+c) = \frac{b}{a} \cdot e^{-\frac{N}{a}} \left(\frac{1-e^{\frac{(N+1)}{a}}}{1-e^{\frac{1}{a}}}\right) = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{e^{-\frac{N}{a}} - e^{\frac{1}{a}}}{1-e^{\frac{1}{a}}}\right)$$

$$\lim_{N\to\infty} y(N+c) = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{\lim_{N\to\infty}(e^{-\frac{1}{a}})^{N} - e^{\frac{1}{a}}}{1-e^{\frac{1}{a}}}\right) = \frac{b}{a} \cdot \frac{e^{\frac{1}{a}}}{e^{\frac{1}{a}}-1} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{a}} < 1$$

$$-\frac{1}{a} < 0 \Rightarrow a > 0$$

Dado que $a > 0 \Rightarrow$ siempre converje.

(d)

$$F(s)=\frac{1}{s},\quad f(t)=U(t),\quad \Rightarrow Y(s)=\frac{be^{-cs}}{s(as+1)}=\left(\frac{b}{s}\cdot\frac{ab}{(as+1)}\right)e^{-cs}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{b}{s(as+1)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\cdot\frac{b}{as+1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{Aas+A+Bs}{s(as+1)}\right\}\Rightarrow A=b\rightarrow B=-ab$$

$$\left(A+\frac{B}{a}e^{-\frac{1}{a}t}\right)U(t)\Rightarrow y(t)=b\left(1-e^{-\frac{1}{a}(t-c)}\right)U(t)$$

(e)

$$f(t)=\sum_{i=0}^{\infty}U(t-i)\Rightarrow F(s)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{s}\cdot e^{-is}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{b\cdot e^{-(c+i)s}}{s(as+1)}\Rightarrow y(t)=\sum_{i=0}^{\infty}b\left(1-e^{-\frac{1}{a}(t-c-i)}\right)U(t-c-i).$$

Ejercicio 4.16. *La función de transferencia que caracteriza a un motor de corriente continua y que relaciona la frecuencia que gira el motor $y(t)$ y el voltaje de armadura $v(t)$ viene dada por:*

$$H(s)=\frac{Y(s)}{V(s)}=\frac{k}{(R_a+L_as)(Js+b)+k^2}$$

$$y(0)=y'(0)=0\quad,\quad k=i_fG$$

i_f es la corriente de campo constante caracteristica del motor,J es la inercia del motor,b es el coeficiente de fricción viscosa y R_a, L_a resistencia e inductancia de armadura respectivamente.

Calcular $y(t)$ ocupando el teorema de convolución.

Solución:

$$Y(s)=H(s)\cdot V(s)\Rightarrow y(t)=\int_0^t v(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{k}{JL_a s^2 + (JR_a + bL_a)s + sR_a + k^2} = \frac{\frac{k}{JL_a}}{s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{b}{J}\right)s + \frac{bR_a + k^2}{JL_a}}$$

$$a = \frac{k}{JL_a} \quad , \quad b = \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{b}{J}\right)\frac{1}{2} \quad , \quad c = \frac{bR_a + k^2}{JL_a}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{a}{s^2 + 2bs + c} = \frac{a}{(s+b)^2 + c - b^2}$$

Caso 1: $c - b^2 = 0$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{a}{(s+b)^2}\right\} = e^{-bt}L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2}\right\} = a \cdot e^{-bt} \cdot t$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t v(\tau)a \cdot e^{-b(t-\tau)}(t-\tau)d\tau$$

Caso 2: $c - b^2 = w^2 > 0$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{a}{(s+b)^2 + w^2}\right\} = \frac{a}{w^2} \cdot e^{-bt}L^{-1}\left\{\frac{w}{s^2 + w^2}\right\} = \frac{a}{\sqrt{c - b^2}} \cdot e^{-bt}\sin\left(\sqrt{c - b^2} \cdot t\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t v(\tau)\frac{a}{\sqrt{c - b^2}} \cdot e^{-b(t-\tau)}\sin\left(\sqrt{c - b^2} \cdot (t-\tau)\right)d\tau$$

Caso 3: $c - b^2 = -w^2 < 0$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{a}{(s+b)^2 - w^2}\right\} = ae^{-bt}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-w)(s+w)}\right\} = \frac{ae^{-bt}}{2w}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-w)} - \frac{1}{(s+w)}\right\}$$

$$= \frac{a \cdot e^{-bt}}{2\sqrt{b^2 - c}} \cdot \left(e^{wt} - e^{-wt}\right) = \frac{a \cdot e^{-bt}}{\sqrt{b^2 - c}} \cdot \cos h(\sqrt{b^2 - c} \cdot t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t v(\tau)\frac{a}{\sqrt{b^2 - c}} \cdot e^{-b(t-\tau)} \cdot \cos h\left(\sqrt{b^2 - c} \cdot (t-\tau)\right)d\tau$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Ejercicio 4.17. *Sea $f(t)$ una función continua a tramos y de orden exponencial. Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, demuestre las propiedades del valor inicial y final:*

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0).$$

Solución:

Se sabe que la transformada de una derivada cumple la siguiente propiedad:

$$\mathcal{L}\left(f'(t)\right) = sF(s) - f(0)$$

Tomando límite cuando $s \to \infty$

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\left(f'(t)\right) = \lim_{s\to\infty} \left(sF(s) - f(0)\right)$$

El lado izquierdo de la igualdad tiende a cero por ser la tranformada de una función. De aquí se concluye. Ahora la propiedad del valor final:

$$\lim_{s\to 0} \left(sF(s) - f(0)\right) = \lim_{s\to 0} \int_0^\infty e^{-st} f' dt = \int_0^\infty f' dt = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0)$$

Entonces $\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$.

4.10. Ejercicios Planteados.

Propuesto 4.1. *Sea $f : [0, \infty) \to \Re$ función continua a trozos y de orden exponencial. Demuestre que si $F(s)$ denota la transformada de Laplace de f, entonces:*

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$$

Propuesto 4.2. *Sea $f : (0, \infty) \to \Re$ continua en $(0, \infty)$ y de orden exponencial y tal que*

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = +\infty$$

(a) Si $\lim_{t \to 0^+} t^\alpha f(t) = 1$, $\alpha \in (0, 1)$, demuestre que la transformada de laplace de la función existe.

(b) La transformada de Laplace de la función $t^{-\frac{1}{2}} \cosh(t)$ tiene la forma

$$I = h(s)\sqrt{s + \sqrt{(s^2 - 1)}}$$

Encuentre $h(s)$ y de aquí la expresión final de la transformada.

Propuesto 4.3. *(a) Considere el problema con valores iniciales:*

$$x'' + 2x' + x = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n\pi}(t) \qquad ; \qquad x(0) = x'(0) = 0$$

Determine la solución usando transformada de Laplace, para esto suponga que la transformada de la serie es la serie de las transformadas y similarmente para la transformada inversa.

(b) Si $t \in [j\pi, (j + 1)\pi]$ demuestre que $x(t) = e^{-t}(t\alpha_j + \beta_j)$, para ciertas constantes α_j y β_j.

Solución:

(a) $x(t) = Ł^{-1}\left\{X(s)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} U(t - n\pi)[t - n\pi]e^{-(t-n\pi)}$.

(b) $\alpha_j = \sum_{n=0}^{j} e^{n\pi}, \qquad \beta_j = \sum_{n=0}^{j} n\pi e^{n\pi}$.

Propuesto 4.4. *Encuentre las siguientes transformadas de Laplace:*

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

(a) $L\{e^{2t}(t-1)^2\}$

(b) $L\{e^t U(t-5)\}$

(c) $L\{te^{-3t}cos(3t)\}$

(en (b) U es la función Escalón Unitario).

Solución:

(a) $\dfrac{2}{(s-2)^3} - \dfrac{2}{(s-2)^2} + \dfrac{1}{(s-2)}.$

(b) $\dfrac{e^{-5(s-1)}}{s-1}.$

(c) $-\dfrac{(s+2)^2-9}{((s+2)^2+9^2)}.$

Propuesto 4.5. *Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$x' = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} U(t-a) \\ \delta(t-b) \end{bmatrix} \qquad a, b \in \Re^+$$
$$x(0) = 0$$

Solución:

$$x(t) = U(t-b)e^{a(t-b)}\sin(b(t-b)) + U(t-a)\left(\tfrac{1}{b}e^{a(t-a)}\sin(b(t-a)) - a\left\{A + \tfrac{B}{b}e^{a(t-a)}\sin(b(t-a))\right\}\right)$$

$$y(t) = -bU(t-a)\left\{A + \tfrac{B}{b}e^{a(t-a)}\sin(b(t-a))\right\} + U(t-b)\left\{e^{a(t-b)}\cos(b(t-b))\right\}.$$

Propuesto 4.6. *Usando transformada de Laplace encuentre la solución de la ecuación integral:*

$$y(t) = \cos t + \int_o^t e^{-s}y(t-s)ds$$

Solución:

$y(t) = \cos(t) + \sin(t).$

Propuesto 4.7. *Calcule la transformada de Laplace de la onda cuadrada:*

$$w(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 2n \leq t < 2n+1, \qquad n \in N \\ -1 & si \quad 2n+1 \leq t < 2n+2, \qquad n \in N. \end{cases}$$

<u>Solución:</u>

$$L\{w(x)\} = \frac{1}{s} \tan h \left(\frac{s}{2}\right).$$

Propuesto 4.8. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{array}{c} x' - 2y = \delta(t-1) \\ y' - 8x = \delta(t-2) \end{array}$$

$$y(0) = x(0) = 0$$

<u>Solución:</u>

$$\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{1}{8}\cosh 4(t-2)U(t-2) + \dfrac{1}{8}\sinh 4(t-1)U(t-1) \\ y(t) = \cosh 4(t-2)U(t-2) + \sinh 4(t-1)U(t-1) \end{array}.$$

5. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

5.1. Introducción. Comencemos considerando la ecuación escalar de orden n

$$a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t), \tag{5.1}$$

con las condiciones iniciales

$$y(t_0) = d_1, \quad y'(t_0) = d_2, \cdots, y^{(n-1)}(t_0) = d_n, \tag{5.2}$$

donde suponemos que $t_0 \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y las funciones coeficientes $a_i(t)$, $i = 0, \cdots, n$, y $g(t)$, $t \in I$, son continuas, con $a_n(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Mostraremos que este problema se puede escribir equivalentemente como un sistema de ecuaciones diferenciales con condición inicial. Definamos

$$x_1 = y,\ x_2 = y', \cdots, x_n = y^{(n-1)}.$$

Obtenemos entonces el siguiente sistema de $n-1$ ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n. \end{aligned}$$

Como tenemos n incognitas $x_1, \cdots, x_n$ y $n-1$ ecuaciones nos falta una ecuación que se obtiene de la siguiente manera. De (5.1) dividiendo por a_n y reemplazando las definiciones anteriores nos queda

$$x_n' = b_1(t)x_1 + \cdots + b_n(t)x_n + \frac{g(t)}{a_n(t)},$$

donde

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$b_i(t) = -\frac{a_{i-1}(t)}{a_n(t)}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Estas n ecuaciones se pueden escribir como el sistema matricial

$$x' = A(t)x + f(t),$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{g(t)}{a_n(t)} \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

y

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) & \cdots & b_n(t) \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

De las condiciones iniciales (5.2) se tiene que

$$y(t_0) = d_1 = x_1(t_0), \quad \cdots \quad , y^{(n-1)}(t_0) = d_n = x_n(t_0).$$

De esta forma el problema con condiciones iniciales (5.1)-(5.2) se transforma en el sistema con condiciones iniciales

$$x' = A(t)x + f(t) \qquad\qquad x(t_0) = d = [d_1 \cdots d_n]^t. \tag{5.5}$$

Si ahora partimos del sistema (5.5) donde $A(t)$ y $f(t)$ son como en (5.4), (5.3), entonces uno puede demostrar que si $x(t)$ es una solución y hacemos $y(t) = x_1(t)$

entonces $y(t)$ es solución de la ecuación escalar

$$y^{(n)} - b_n(t)y^{(n-1)} - \cdots - b_1(t)y = \frac{g(t)}{a_n(t)}.$$

En efecto, se satisface que

$$x_2 = x_1' = y', \quad x_3 = x_2' = y'', \quad \cdots, x_n = y^{(n-1)}, \quad x_n' = y^{(n)}.$$

De aquí se consigue facilmente que $y(t)$ satisface la ecuación escalar (5.1) y las condiciones iniciales (5.2).

En forma más general consideremos la ecuación diferencial lineal vectorial de primer orden,

$$x' = A(t)x + f(t) \tag{5.6}$$

donde ahora

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Supondremos de ahora en adelante:

(H_2) *las funciones* $A : I \mapsto \mathbb{M}^{n^2}$ *y* $f : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1}$, *son continuas en un intervalo* $I \subset \mathbb{R}$. *Equivalentemente las funciones* $a_{ij} : I \mapsto \mathbb{R}$, *y* $f_i : I \mapsto \mathbb{R}$, $i, j = 1, \cdots, n$ *son continuas en* I.

Decimos que esta ecuación es homogenea si $f(t) \equiv 0$ y no homogenea en caso contrario. De esta forma la ecuación homogenea correspondiente a (5.6) es

$$x' = A(t)x.$$

Un caso particular de estos sistemas es cuando la matriz $A(t)$ es de coeficientes constantes, este caso se estudiará con bastante detalle en este curso.

Para motivar los resultados de esta sección vamos a comenzar con un ejemplo. Sea

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$x' = Ax,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Imitando el caso escalar visto anteriormente vamos a suponer soluciones de la forma $x(t) = Ke^{\lambda t}$. Reemplazando en la ecuación se obtiene que el vector K y λ deben satisfacer

$$(A - \lambda I)K = 0,$$

para tener soluciones de esta forma. Es decir λ debe ser valor propio y K vector propio de la matriz A. Calculando el polinomio caracteristico, se tiene

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(1 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4,$$

de donde $\det(A - \lambda I) = 0$ nos da como raices $\lambda_1 = 4$, y $\lambda_2 = -1$. Evaluando los correspondientes vectores propios se tiene, para λ_1

$$[A - 4I]K = \begin{bmatrix} -2K_1 + 3K_2 \\ 2K_1 - 3K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}.$$

Se obtiene $K_2 = \frac{2}{3}K_1$ por lo que

$$K = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Normalizando tal que $K_1 = 1$ se obtiene el vector propio (que genera un subespacio propio de dimensión uno)

$$K^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

En forma similar para λ_2 se tiene

$$K = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

y normalizando se obtiene el vector propio

$$K^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

De esta manera hemos encontrado las dos soluciones del sistema,

$$x^1(t) = K^1 e^{4t} \quad \text{y} \quad x^2(t) = K^2 e^{-t}.$$

Es inmediato que la expresión

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) = c_1 K^1 e^{4t} + c_2 K^2 e^{-t},$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias es también solución del sistema. Veremos más tarde que la solución general de este sistema se puede representar en esta forma.

Notemos que $x(t)$ se puede escribir como

$$x(t) = \mathcal{K} \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

donde $\mathcal{K}$ es la matriz $\mathcal{K} = [K^1, K^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$ cuyas columnas son los vectores propios de A. De aquí se tiene

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{4t} & e^{-t} \\ \frac{2}{3}e^{4t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Para $t = 0$, se tiene

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

de donde

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{3}{5}(x_1(0) + x_2(0)) \\ c_2 &= \frac{2}{5}x_1(0) - \frac{3}{5}x_2(0), \end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} & e^{-t} \\ \frac{2}{3}e^{4t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{4t} & e^{-t} \\ \frac{2}{3}e^{4t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}.$$

que nos da

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}e^{4t} + \frac{2}{5}e^{-t} & \frac{3}{5}e^{4t} - \frac{3}{5}e^{-t} \\ \frac{2}{5}e^{4t} - \frac{2}{5}e^{-t} & \frac{2}{5}e^{4t} + \frac{3}{5}e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Definiendo la matriz

$$e^{At} := \begin{bmatrix} \frac{3}{5}e^{4t} + \frac{2}{5}e^{-t} & \frac{3}{5}e^{4t} - \frac{3}{5}e^{-t} \\ \frac{2}{5}e^{4t} - \frac{2}{5}e^{-t} & \frac{2}{5}e^{4t} + \frac{3}{5}e^{-t} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

podemos escribir la solución como

$$x(t) = e^{At}x(0).$$

La matriz (5.9), como la notación lo sugiere, se llama la matriz exponencial de tA. Notamos que $e^{0 \cdot A} = I$.

Notemos a continuación que de algebra lineal se tiene que la matriz

$$\Lambda := \mathcal{K}^{-1}A\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hagamos a continuación el cambio de variable

$$y = \mathcal{K}^{-1}x \quad \text{con} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

De aqui que

$$x(t) = \mathcal{K}y(t), \tag{5.10}$$

y reemplazando en la ecuación diferencial se tiene

$$y' = \mathcal{K}^{-1}x' = \mathcal{K}^{-1}Ax(t) = \mathcal{K}^{-1}A\mathcal{K}y = \Lambda y(t),$$

que nos da el sistema equivalente

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 \\ y_2' &= -y_2. \end{aligned}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones escalares de primer orden (sistema esta desacoplado) que resolvemos obteniendo

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1(0)e^{4t} \\ y_2(t) &= y_2(0)e^{-t}. \end{aligned}$$

Podemos entonces escribir

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} y(0),$$

que nos da la solución en las coordenadas y. Como antes la matriz exponencial de $t\Lambda$ es

$$e^{t\Lambda} = \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

La ecuación escrita en las coordenadas y, la llamaremos la representación canónica de la ecuación. Consideremos su solución $(y_1(t), y_2(t))$, eliminando t de $y_1(t) = e^{4t}y_1(0)$ e $y_2(t) = e^{-t}y_2(0)$, tenemos que $y_1(t)$, $y_2(t)$ satisfacen el lugar geométrico $y_1 y_2^4 = C$. Se deja como ejercicio dibujar estos lugares geométricos para distintas condiciones iniciales de la solución.

Vamos a generalizar el ejemplo considerando ahora la ecuación más general

$$x' = Ax \qquad \text{con } A = [a_{ij}]_{n\times n}$$

una matriz de coeficientes reales. Basados en el ejemplo anterior vamos a intentar soluciones de la forma $x(t) = Ke^{\lambda t}$. Derivando se tiene, $x'(t) = AKe^{\lambda t}$, y reemplazando en la ecuación se observa que esta expresión será solución si

$$(A - \lambda I)K = 0.$$

Supongamos para continuar que $\det(A-\lambda I) = 0$ tiene n valores propios reales y distintos, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, con correspondientes vectores propios $K^1, \cdots, K^n$. Entonces

$$x^i(t) = e^{\lambda_i t}K^i \qquad i = 1, \cdots, n$$

son n soluciones que afirmamos son linealmente independientes. En efecto, supongamos que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) = 0 \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces para $t = 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i K^i = 0.$$

Como K^i son vectores propios correspondientes a valores propios reales y distintos, son linealmente independientes (forman una base en $\mathbb{R}^n$). Así necesariamente $c_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

Más adelante vamos a ver que la solución general de esta ecuación tiene la forma

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t)$$

donde $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ son n soluciones linealmente independientes y c_i, $i = 1, \ldots, n$ constantes arbitrarias.

Ejemplo 5.1. *Como aplicación consideremos la ecuación*

$$x' = Ax$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Para evaluar valores y vectores propios, formamos

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{bmatrix},$$

de donde $\det(A - \lambda I) = 0$, *nos da los valores propios* $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$ *y* $\lambda_3 = 5$.

Evaluando los correspondientes vectores propios y normalizando, obtenemos

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$K^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K^2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De esta manera las expresiones

$$x^1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}, \quad x^2(t) = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t}, \quad y \quad x^3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

son tres soluciones (linealmente independientes) de la ecuación diferencial. De aquí que la solución general se puede representar como

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t},$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

5.2. Propiedades generales de sistemas. Consideremos la ecuación no homogenea

$$x' = A(t)x + f(t), \tag{5.12}$$

donde I es un intervalo real $A : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times n}$, $f : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1}$ son funciones continuas.

Por una solución a este problema entendemos una función $x : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1}$, de clase C^1, que satisface (5.12). En esta sección daremos algunas propiedades generales que satisfacen estas soluciones y para eso vamos primero a estudiar el problema con condiciones iniciales,

$$(CI) \qquad \begin{cases} x' = A(t)x + f(t) \\ x(t_0) = c, \quad t_0 \in I. \end{cases}$$

El teorema fundamental para este problema es el siguiente.

Teorema 5.1. *El problema (CI) tiene una única solución definida en el intervalo I.*

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Este teorema nos dice que hay *existencia* y *unicidad* de soluciones para el problema (CI). La demostración del Teorema 5.1 será consecuencia de dos lemas que demostramos primero.

Lema 5.1 (Unicidad)**.** *El problema (CI) tiene a lo más una solución.*

Demostración. Supongamos que $x(t)$, $y(t)$ son dos soluciones del problema (CI) y sea $T \in I$ tal que $T > t_0$. (Si $T < t_0$ la demostración es similar). Sea $I_T = [t_0, T]$. Entonces para $t \in I_T$, integrando se tiene

$$x(t) = c + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds,$$

$$y(t) = c + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

Sea $z(t) = x(t) - y(t)$, entonces z satisface

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)z(s)ds, \quad z(t_0) = 0.$$

Tomando norma (euclideana),

$$\mid z(t) \mid = \mid \int_{t_0}^{t} A(s)z(s)ds \mid \leq \int_{t_0}^{t} \mid A(s)z(s) \mid ds \leq \int_{t_0}^{t} \mid A(s) \mid\mid z(s) \mid ds.$$

Notando que la función $s \in I \mapsto \mid A(s) \mid$ es contínua, podemos poner $m_1 = \max\limits_{s \in I_T} \mid A(s) \mid$. Entonces para todo $t \in I_T$, se tiene

$$\mid z(t) \mid \leq \quad m_1 \int_{t_0}^{t} \mid z(s) \mid ds.$$

Sea $r(t) = \int_{t_0}^{t} \mid z(s) \mid ds$. Derivando, se obtiene

$$r'(t) = \mid z(t) \mid \leq m_1 r(t),$$

que escribimos como

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$r'(t) - m_1 r(t) \leq 0.$$

Multiplicando por $e^{-m_1 t}$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-m_1 t} r(t)) \leq 0.$$

Integrando $\int_{t_0}^{t}$ nos da

$$e^{-m_1 t} r(t) \leq e^{-m_1 t} r(t_0) = 0,$$

que nos dice que $r(t) = 0$ para todo $t \in I_T$, y por lo tanto $|z(t)| = 0$ o equivalentemente $x(t) = y(t)$ para todo $t \in I_T$, en particular se tiene $x(T) = y(T)$. Como $T \in I$ es cualquiera se tiene el resultado. Ya que una demostración similar vale para el caso en que $T < t_0$, esto termina la demostración del lema. $\square$

Lema 5.2. *Para cualquier intervalo $[\alpha, \beta] \subset I$, tal que, $t_0 \in [\alpha, \beta]$ el problema (CI) tiene una solución (que es única).*

Demostración. Empezamos notando que el problema (CI) tiene una solución, $x(t)$, si y solo si

$$x(t) = c + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

En lo que sigue denotaremos $I_{\alpha\beta} = [\alpha, \beta]$. Definamos una sucesión de funciones $\{\phi_k\} : I_{\alpha\beta} \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de la siguiente manera

$$\phi_0(t) = 0 \quad \text{para todo} \quad t \in I_{\alpha\beta},$$

$$\phi_{k+1} = c + \int_{t_0}^{t} [A(s)\phi_k(s) + f(s)]ds \quad \text{para todo} \quad t \in I_{\alpha\beta}.$$

Es claro que estas funciones ϕ_k son contínuas en $[\alpha, \beta]$. Definamos también la sucesión de funciones $\{\psi_k\} : I_{\alpha\beta} \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\psi_k(t) = \phi_{k+1}(t) - \phi_k(t).$$

Sumando telescópicamente, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{N} \psi_k(t) = \phi_{N+1}(t) - \phi_0(t)$$

de donde

$$\phi_{N+1}(t) = \sum_{k=0}^{N} \psi_k(t).$$

Así se tiene que $\lim\limits_{N\to\infty} \phi_{N+1}(t)$ existe si y solo si $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \psi_k(t)$ existe. Esto es, si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t)$ es convergente para cada t. Vamos a mostrar que en realidad la sucesión $\{\phi_k\}$ converge uniformemente en $I_{\alpha\beta}$.

Se tiene

$$\psi_0(t) = \phi_1(t)$$

y para $k \in \mathbb{N}$,

$$\psi_k(t) = \phi_{k+1}(t) - \phi_k(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)[\phi_k(s) - \phi_{k-1}(s)]ds,$$

de donde

$$\psi_k(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\psi_{k-1}(s)ds,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea ahora $K = \max\limits_{s\in[\alpha,\beta]} \mid A(s) \mid$. Entonces

$$\mid \psi_k(t) \mid \leq \left| \int_{t_0}^{t} \mid A(s) \mid \mid \psi_{k-1}(s) \mid ds \right| \leq \ K \left| \int_{t_0}^{t} \mid \psi_{k-1}(s) \mid ds \right|.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

De aquí, tenemos

$$| \psi_1(t) | \leq \quad K\Big|\int_{t_0}^{t} | \psi_0(s) | \, ds\Big| = K\Big|\int_{t_0}^{t} | \phi_1(s) | \, ds\Big|.$$

Como

$$\phi_1(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(s)ds,$$

si hacemos $T = \max\{\beta - t_0, t_0 - \alpha)\}$ y $M =| c | + \sup\limits_{s\in[\alpha,\beta]} | f(s) | T$, entonces $| \phi_1(t) |\leq M$. Se sigue que

$$| \psi_1(t) |\leq \quad KM|t-t_0|$$

para todo $t \in I_{\alpha,\beta}$, y por lo tanto

$$| \psi_2(t) |\leq \quad MK^2\frac{|t-t_0|^2}{2!}.$$

Continuamos por inducción. Así suponemos que

$$| \psi_i(t) |\leq \quad M\frac{K^i}{i!}|t-t_0|^i$$

y queremos probarlo para $i+1$. Se tiene

$$| \psi_{i+1}(t) |\leq \quad K\Big|\int_{t_0}^{t} | \psi_i(s) | \, ds\Big| \leq M\frac{K^{i+1}}{(i+1)!}|t-t_0|^{i+1},$$

que termina la inducción.

Recordemos en este punto que estamos estudiando $\lim_{N\to\infty} \phi_N(t)$ y que este existe si y solo si $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(t)$ es convergente. Vamos a ver que esta convergencia es en realidad convergencia uniforme. Para l, m en $\mathbb{N}$ con $l > m$, se tiene

$$|\phi_l(t) - \phi_m(t)| \leq \sum_{j=m}^{l-1} |\psi_j(t)| \leq M \sum_{j=m}^{l-1} \frac{K^j}{j!} |t - t_0|^j. \tag{5.13}$$

para todo $t \in I_{\alpha,\beta}$. Como $e^{KT} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{K^j}{j!} T^j$, es entonces claro que dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 > 0$ tal que para todo $l, m \geq m_0$, $l > m$, se tiene que

$$\sum_{j=m}^{l-1} \frac{K^j}{j!} |t - t_0|^j < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Así de (5.13),

$$|\phi_l(t) - \phi_m(t)| < \varepsilon,$$

que implica

$$\sup_{t \in I_{\alpha,\beta}} |\phi_l(t) - \phi_m(t)| < \varepsilon.$$

Esto nos dice que la sucesión $\{\phi_j\}$ es de Cauchy en el espacio $C(I_{\alpha,\beta}, \mathbb{M}^{n\times 1})$, y por lo tanto converge uniformemente en $I_{\alpha,\beta}$ a una función continua ϕ.

Volvamos ahora a

$$\phi_{k+1}(t) = c + \int_{t_0}^{t} [A(s)\phi_k(s) + f(s)] ds$$

que escribimos como

$$\phi(t) + \phi_{k+1}(t) - \phi(t) = c + \int_{t_0}^{t} A(s)[\phi_k(s) - \phi(s)] ds + \int_{t_0}^{t} [A(s)\phi(s) + f(s)] ds.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

De aquí

$$\begin{aligned} &| \; \phi(t) - c - \int_{t_0}^{t} [A(s)\phi(s) + f(s)]ds \; | \; \leq \\ \leq \; &| \; \phi(t) - \phi_{k+1}(t) \; | + \left| \int_{t_0}^{t} A(s)[\phi_k(s) - \phi(s)]ds \right| \\ \leq \; &| \; \phi(t) - \phi_{k+1}(t) \; | + \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)| \, |\phi_k(s) - \phi(s)| ds \right|. \end{aligned}$$

De la convergencia uniforme de la sucesión $\{\phi_j(t)\}$ se tiene que el lado derecho de esta desigualdad tiende a cero cuando $k \to \infty$. Por lo tanto tomando $k \to \infty$ en esta desigualdad se obtiene que

$$\phi(t) = c + \int_{t_0}^{t} A(s)\phi(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

Derivando esta expresión se obtiene que la función ϕ satisface

$$\begin{cases} \phi'(t) = A(t)\phi(t) + f(t), \quad t \in I_{\alpha\beta}, \\ \phi(t_0) = c \end{cases}$$

que es lo que queríamos. □

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema 5.1.

Demostración del Teorema 5.1. Sabemos de los dos lemas anteriores que para cualquier intervalo de la forma $[\alpha, \beta] \subset I$, tal que $t_0 \in [\alpha, \beta]$, el problema (CI) tiene una única solución. La demostración del teorema consiste entonces en lo siguiente: dado el intervalo I fijamos un intervalo de la forma $[\alpha, \beta] \subset I$ y extendemos la solución correspondiente a este intervalo a todo el intervalo I.

Para mostrar como se hace esta extensión vamos a considerar distintas situaciones para I.

-Si $I = [a, b]$, $t_0 \in I$, fijamos $a = \alpha$, $b = \beta$ e inmediatamente tenemos el resultado.

- Si $I = (a, b)$, con $t_0 \in I$, $-\infty < a$, $b < \infty$, entonces definimos la sucesión de intervalos $\{I_j\}$, $I_j = [a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}]$, $j \in \mathbb{N}$. Es claro que $I_j \subset I$ y que existe un j_0 tal que para todo $j > j_0$, se tendrá que $t_0 \in I_j$ y que

$$I = \cup_{j \geq j_0}^{\infty} [a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}].$$

Por los dos lemas anteriores el problema

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\begin{cases} x' = A(t)x + f(t) \\ x(t_0) = c \end{cases} \tag{5.14}$$

tiene una única solución $x_{j_0}(t)$ definida en el intervalo I_{j_0}, tal que, $x_{j_0}(t_0) = c$. Consideremos a continuación el problema (5.14) en el intervalo I_{j_0+1}. Nuevamente por los dos lemas anteriores este problema tiene una única solución $x_{j_0+1}(t)$ definida en I_{j_0+1}, tal que, $x_{j_0+1}(t) = c$. Del Lemma 5.1 se tiene además que

$$x_{j_0}(t) = x_{j_0+1}(t) \qquad \text{para todo} \quad t \in I_{j_0}$$

Así que x_{j_0+1} extiende x_{j_0} al intervalo $I_{j_0+1} \supset I_{j_0}$. De esta manera, por recurrencia, si tenemos extendida en forma única la solución al problema 5.14 al intervalo I_j, $j > j_0$ entonces la podemos extender en forma única al intervalo $I_{j+1} = [a + \frac{1}{j+1}, \quad b - \frac{1}{j+1}]$, usando como antes los lemas anteriores. Así el problema 5.14 tiene definida una solución, $x_j(t)$, en cada intervalo I_j, $j \geq j_0$, y tal que $x_j(t) = x_{j+1}(t)$, para todo $t \in I_j$.

Sea $t \in (a, b)$, vamos a asignar a este t un único vector $x(t)$. Para $t \in (a, b)$ sea $l \in \mathbb{N}$, $l \geq j_0$, tal que $t \in I_l = [a + \frac{1}{l}, b - \frac{1}{l}]$ y donde suponemos que l es el mínimo de los j tales que $t \in I_j = [a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}]$.

Definimos entonces $x(t) = x_l(t)$, donde x_l es la solución del problema (5.14) definida en I_l. Notando que $x_j(t) = x_l(t) = x(t)$, para todo $j \geq l$, vemos que para cada $t \in (a, b)$ podemos asignar un único vector $x(t)$. Definimos de esta forma una función $x : (a, b) \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1}$ que por construccción satisface el problema (5.14), para cada $t \in (a, b)$. Además por Lema 5.1 esta solución es única.

- Si ahora $I = [a, b)$ o $I = (a, b]$ tomamos respectivamente $I = \cup_{j \geq j_0}[a, b - \frac{1}{j}]$ o $I = \cup_{j \geq j_0}[a + \frac{1}{j}, b]$, y procedemos similarmente al caso anterior.

-Finalmente, si por ejemplo, $I = [a, \infty)$, tomamos una sucesión de conjuntos $\{I_j\}$ de la forma $I_j = [a, b + j]$, $j \in \mathbb{N}$. Se tiene $I = \cup_{j=j_0}^{\infty} I_j$ donde como antes j_0 es tal que $t_0 \in I_{j_0}$, para todo $j \geq j_0$, y procedemos igual que antes para extender la solución a todo I.

Ya que en todos los casos la extensión de la solución es única se termina la demostración del teorema.

$\square$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Nos encaminamos a continuación a estudiar varias propiedades de la ecuación homogenea

$$x' = A(t)x, \tag{5.15}$$

que van a juegar un papel fundamental en demostrar que el conjunto de sus soluciones tiene una estructura de espacio vectorial con dimensión finita. Como siempre suponemos que la función A esta definida en un intervalo I donde es continua.

Lema 5.3 (Principio de superposición)**.** *Si $x^i(t)$, $i = 1, \cdots, k$, son k soluciones de (5.15) entonces $x(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i x^i(t)$, es tambien solución, donde c_i son constantes arbitrarias.*

Demostración. Se tiene

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i (x^i)'(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i A(t) x^i(t) = A(t) \sum_{i=1}^{k} c_i x^i(t) = A(t)x(t).$$

□

De este lema se tiene en particular que si $x(t)$ es una solución de (5.15) entonces $cx(t)$ también lo es, para cualquier constante c.

Definición 5.1. *Decimos que las funciones $x^i : I \to \mathbb{M}^{n\times 1}$, $i = 1, \cdots, k$, son linealmente dependientes en I si existen constantes c_i, $i = 1, \cdots, k$ no toda nulas tal que:*

$$c_1 x^1(t) + \cdots + c_k x^k(t) = 0, \quad \textit{para todo} \;\; t \in I.$$

Si el conjunto no es linealmente dependientes entonces decimos que es linealmente independientes esto es la expresión

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x^i(t) = 0, \quad \textit{para todo} \;\; t \in I$$

implica que $c_i = 0, i = 1, \cdots, k$.

Definición 5.2. *El wronskiano $W(x^1,\cdots,x^n)(t)$ de las n funciones $x^i : I \to \mathbb{M}^{n\times 1}$, $i = 1,\cdots,n$, es el siguiente determinante.*

$$W(x^1,\cdots,x^n)(t) = \det[x^1(t)\cdots x^i(t)\cdots x^n(t)] = \det\begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{bmatrix},$$

donde

$$x^i(t) = \begin{bmatrix} x_{1i}(t) \\ \vdots \\ x_{ni}(t)\end{bmatrix}, \quad t \in I.$$

Lema 5.4. *Sean $x^i(t)$, $i = 1,\cdots,n$, n soluciones del sistema (5.15) definidas en el intervalo I. Estas soluciones son linealmente independientes, si y solo si, el wronskiano*

$$W(x^1,\cdots,x^n)(t) \neq 0,$$

para todo $t \in I$.

Demostración. Mostremos primero que si $x^i(t)$, $i = 1,\cdots,n$, son n soluciones del sistema (5.15) tales que $W(x^1,\cdots,x^n)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ entonces estas soluciones son linealmente independientes en I. En efecto si ellas fueran linealmente dependientes existirian constantes $c_1,\cdots,c_n$ no todas cero tal que $\sum_{i=1}^{k} c_i x^i(t) = 0$, para todo $t \in I$. En particular, en $t_0 \in I$ fijo, se tiene $\sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t_0) = 0$, que se escribe en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n\end{bmatrix} = 0.$$

Como el determinante de los coeficientes es $W(x^1,\cdots,x^n)(t_0) \neq 0$,, la matriz es invertible, entonces este sistema tiene la única solución $c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0$, que es una contradicción. Así las solución son linealmente independientes.

Ahora vamos a suponer que las n soluciones $\{x^1,\cdots,x^n\}$ son linealmente independientes en I y queremos probar que $W(x^1,\cdots,x^n)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Equivalentemente vamos a probar que si $W(x^1, \cdots, x^n)(t_0) = 0$, algún $t_0 \in I$, entonces $\{x^1, \cdots, x^n\}$ son linealmente dependientes en I.

Se tiene que $W(x^1, \cdots, x^n)(t_0) = 0$ implica que existen constantes $c_1, \cdots, c_n$ no todas nulas tales que

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0.$$

Definamos

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t),$$

entonces z es solución del sistema (5.15) que en $t = t_0$ satisface

$$z(t_0) = \begin{bmatrix} z_1(t_0) \\ \vdots \\ z_n(t_0) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t_0) = \begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0.$$

Esto implica que z es solución del problema

$$z' = A(t)z, \quad z(t_0) = 0.$$

Del Teorema 5.1 se tiene entonces que $z(t) = 0$, para todo $t \in I$. Es decir $\sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t_0) = 0$, donde no todas las constantes son nulas, por lo que las solución son linealmente dependientes en I, que es lo que queríamos probar. $\square$

Notemos que en realidad hemos probado lo siguiente. Sean $x^1, \cdots, x^n$ n soluciones de la ecuación (5.15). Se tiene que $W(x^1, \cdots, x^n)(t_0) \neq 0$, $t_0 \in I$, implica que la soluciónes $\{x^1, \cdots, x^n\}$ son linealmente independientes en I. Si ahora $W(x^1, \cdots, x^n)(t_0) = 0$, $t_0 \in I$, entonces $\{x^1, \cdots, x^n\}$ son linealmente dependientes en I.

Lema 5.5. *Sean $\{x^1, \cdots, x^n\}$ n soluciones linealmente independientes de (5.15). Sea*

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}$$

otra solución cualquiera de esta ecuación, entonces existen constantes $c_1, \cdots, c_n$, *tal que*

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Demostración. Para $t_0 \in I$, formemos el sistema algebraico

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t_0) \\ \vdots \\ z_n(t_0). \end{bmatrix}$$

Como el determinante de los coeficientes es distinto de 0 (soluciones son linealmente independientes) se tiene que existe una única solución de este sistema que llamamos $[c_1 \cdots c_n]^t$. Formemos ahora

$$G(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) \qquad t \in I,$$

entonces $G(t)$ es solución de (5.15) tal que en t_0 satisface

$$G(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t_0) = \begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \\ x_{n1}(t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t_0) \\ \vdots \\ z_n(t_0) \end{bmatrix} = z(t_0).$$

Por el Teorema 5.1, de existencia y unicidad, se debe tener que

$$z(t) = G(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t), \qquad \text{para todo } \ t \in I.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

□

Lema 5.6. *La ecuación homogenea (5.15) tiene un conjunto de n soluciones que son linealmente independientes en I.*

Demostración. Basta considerar el problema

$$(P_i) \qquad \begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = [0 \cdots 1 \cdots 0]^t, \end{cases}$$

donde el 1 va en la posición i, $i = 1, \cdots, n$, y $t_0 \in I$.

Por el Teorema 5.1 se tiene que (P_i) posee una única solución que llamaremos $x^i(t)$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Además

$$\det[x^1(t_0), \cdots, x^n(t_0)] = \det \begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} = \det I = 1,$$

por lo que $\{x^1, \cdots, x^n\}$ es un conjunto de n soluciones que son linealmente independientes. □

Tenemos el siguiente

Teorema 5.2. *Sea S el conjunto de todas las funciones $x : I \to \mathbb{M}^{n\times 1}$ que son solución de la ecuación (5.15), esto es:*

$$S = \{x : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1} \mid \quad x'(t) - A(t)x(t) = 0, \quad \textit{para todo} \ \ t \in I\}.$$

Entonces S es un espacio vectorial real de dimension finita igual a n.

Demostración 11. Del Lema 5.3, se tiene que si x, z son dos soluciones de (5.15) y α, β son escalares reales, entonces $\alpha x + \beta z$, es también solución de (5.15). De aquí que S es un espacio vectorial real. Además de los Lemas 5.5 y 5.6 se tiene que dim$S = n$.

Definición 5.3. *Una base de soluciones del espacio vectorial S de soluciones de la ecuación (5.15) está formada por cualquier conjunto de soluciones linealmente independientes (en I) de esta ecuación.*

Dada una base de soluciones de la ecuación homogenea

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$x' = A(t)x$$

una solución cualquiera x se expresa según esta base por una expresión de la forma

$$x(t) = c_1 x^1(t) + \cdots + c_n x^n(t),$$

donde c_i, $i = 1, \cdots, n$ son constantes. Esta expresión la vamos a llamar la solución general de la ecuación.

Escribiendo

$$x^j(t) = \left[x_{1j}(t) \cdots x_{nj}(t)\right]^t, \quad j = 1, \cdots, n,$$

y denotando por

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

la expresión anterior se se puede escribir como

$$x(t) = X(t)c,$$

donde

$$X(t) = \left[x^1(t) \cdots x^n(t)\right]^t \quad \text{y} \quad c = \left[c_1 \cdots c_n\right]^t.$$

Una matriz $X(t)$ cuyas columnas son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogenea, se llama una matriz fundamental.

Estudiemos ahora como encontrar la solución general de la ecuación no homogenea

$$x' = A(t)x + f(t). \tag{5.16}$$

Sea $x(t)$ una solución cualquiera de esta ecuación y supongamos que por algún método conocemos una solución particular $x_p(t)$ de esta ecuación. Se tiene

$$x' - x_p' = A(t)x(t) + f(t) - A(t)x_p(t) - f(t) = A(t)(x(t) - x_p(t)).$$

Entonces si $x_h(t) = x(t) - x_p(t)$ se tiene que

$$x_h' = A(t)x_h(t).$$

Por lo tanto si $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es una base de soluciones de la ecuación homogenea asociada, podemos escribir

$$x_h(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t).$$

Así

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) + x_p(t).$$

Consideremos ahora el problema de encontrar una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación no-homogenea (5.16). Suponemos que conocemos una base de soluciones $\{x^1, \cdots, x^n\}$ de la ecuación homogenea asociada $x' = A(t)x$. Para esto consideramos

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) x^i(t), \tag{5.17}$$

que viene de la expresión de la solución $x_h(t)$ donde reemplazamos las constantes por funciones $c_i : I \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$. Para determinar estas funciones substituimos esta expresión en la ecuación no-homogenea. Se obtiene,

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) x^i(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)(x^i)'(t)$$

y por lo tanto

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) x^i(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t) A(t) x^i(t).$$

Reemplazando en la ecuación no-homogenea $x' = A(t)x + f(t)$, se obtiene

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) x^i(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t) A(t) x^i(t)$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$= A(t)x(t) + f(t) = A(t)\sum_{i=1}^{n} c_i(t)x^i(t) + f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)A(t)x^i(t) + f(t),$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)x^i(t) = f(t).$$

Poniendo

$$x^j(t) = \left[x_{1j}(t)\cdots x_{nj}(t)\right]^t, \quad j = 1,\cdots,n, \quad f(t) = \left[f_1(t)\cdots f_n(t)\right]^t,$$

el ultimo sistema se puede escribir equivalentemente como

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix},$$

de donde, aplicando la regla de Cramer, obtenemos

$$c_i'(t) = \frac{\det \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & f_1(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & f_n(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}}{W(x_1,\cdots,x_n)(t)}, \quad i = 1,\cdots,n,$$

note que $f(t)$ reemplaza la columna i en el numerador. Integrando se determinan estas funciones c_i que reemplazadas en (5.17) nos da la solución particular buscada.

En términos de matrices fundamentales, para buscar la solución particular de (5.16) procedemos de la manera siguiente. La solución general de la ecuación homogénea $x' = A(t)x$ se puede escribir como

$$x_h(t) = X(t)c,$$

donde $X(t)$ es una matriz fundamental y c un vector arbitrario en $\mathbb{M}^n$. Ponemos entonces

$$x(t) = X(t)c(t),$$

y lo reemplazamos en (5.16). Se obtiene

$$x'(t) = X'(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)X(t)c(t) + f(t).$$

y como $X(t)$ es una matriz fundamental, se tiene

$$X(t)c'(t) = f(t).$$

de donde

$$c'(t) = X(t)^{-1}f(t).$$

Integrando entre $\tau \in I$ y $t \in I$,

$$c(t) = c(\tau) + \int_\tau^t X(s)^{-1}f(s)ds,$$

por lo que la solución general de (5.16) queda como

$$x(t) = X(t)c(\tau) + X(t)\int_\tau^t X(s)^{-1}f(s)ds.$$

La solución $x_p(t) = X(t)\int_\tau^t X(s)^{-1}f(s)ds$ la llamamos la solución particular de la ecuación La fórmula anterior se puede escribir también como

$$x(t) = X(t)c(\tau) + \int_\tau^t G(t,s)f(s)ds,$$

donde $G(t,s) = X(t)X(s)^{-1}$. Notamos que $G(s,s) = I$.

Estas fórmulas son particularmente útil cuando la matriz A es de constantes, como veremos más adelante. En este caso vamos a tomar como matriz fundamental $X(t) = e^{tA}$. Con esto la solución particular se escribe

$$x_p(t) = X(t)\int_\tau^t X(s)^{-1}f(s)ds = e^{tA}\int_\tau^t e^{-sA}f(s)ds = \int_\tau^t e^{(t-s)A}f(s)ds,$$

que nos dice que para calcular la solución particular tenemos que conocer la matriz exponencial y evaluarla en $(t-s)$.

5.3. Matriz exponencial. Comencemos con una definición. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de matrices $n\times n$ de números complejos, los números reales los miramos como números complejos con parte imaginaria cero. El espacio vectorial de las matrices $n\times n$ lo denotaremos por $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$.

Consideremos la serie asociada

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_l = A_1 + A_2 + \cdots$$

Diremos que esta serie es convergente si la sucesión de sus sumas parciales $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $S_k = \sum_{l=1}^{k} A_l$, es convergente. Así si $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$ entonces ponemos

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_l = S,$$

y S lo llamamos la suma de la serie. Si el termino general de la serie se escribe $A_l = [a_{ij}]_{n\times n}$ entonces es fácil ver que la serie converge si y solo si cada termino a_{ij} es convergente.

Sea ahora A una matriz $n\times n$ de numeros complejos y consideremos la serie

$$I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^l}{l!} + \cdots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!}. \tag{5.18}$$

Proposición 5.1. *La serie* $\sum_{l=0}^{\infty} \dfrac{A^l}{l!}$ *es convergente.*

Demostración 12. Tenemos que probar que la sucesión $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $S_k = \sum_{l=0}^{k} \dfrac{A^l}{l!}$, es convergente. Para esto miramos a $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$ como un espacio normado completo, donde para $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$ tomamos la norma $||A|| = (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{1/2}$. Se tiene, para $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$

$$||S_p - S_q|| \leq \sum_{l=q+1}^{p} \frac{||A^l||}{l!} \leq \sum_{l=q+1}^{p} \frac{||A||^l}{l!}.$$

En vista de esto consideramos la serie

$$e^{||A||} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{||A||^l}{l!}.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Como esta serie es convergente se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p, q \in \mathbb{N}$, $p > n_0$, $q > n_0$ $(p > q)$, se tiene

$$\sum_{l=q+1}^{p} \frac{||A||^l}{l!} < \varepsilon.$$

Pero entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p, q \in \mathbb{N}$, $p > n_0$, $q > n_0$ $(p > q)$, se tiene

$$||S_p - S_q|| < \varepsilon,$$

que dice que la sucesión $\{S_k\}$, es de Cauchy en $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$ y por lo tanto convergente. De aqui que la serie en (5.18) sea convergente.

Es costumbre llamar a este limite la exponencial de A y se escribe

$$e^A = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!} = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^l}{l!} + \cdots \tag{5.19}$$

La matriz exponencial conserva algunas de las propiedades de la función exponencial (más adelante). En particular $e^0 = I$, $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$ para $s, t \in \mathbb{R}$. De aqui $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ (tome $t = 1, s = -1$).

Por otro lado de lo que hemos probado notamos que se tiene lo siguiente

Proposición 5.2.

$$||e^A|| \le e^{||A||}.$$

Demostración 13. En efecto

$$||e^A|| = ||\sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!}|| = \lim_{j\to\infty} ||\sum_{l=0}^{j} \frac{A^l}{l!}|| \le \lim_{j\to\infty} \sum_{l=0}^{j} \frac{||A||^l}{l!} = e^{||A||}.$$

Nos encaminamos ahora a considerar como la matriz exponencial esta relacionada con el problema

$$x' = Ax,$$

donde $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$. Para esta matriz A sea $t \in \mathbb{R}$ y formemos e^{tA}. Definimos así una función de los reales en $\mathbb{M}^{n\times n}$. Se tiene

Proposición 5.3. *La función e^{tA} es diferenciable (por lo tanto continua) para cada $t \in \mathbb{R}$, y se tiene*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Demostración 14. Por definición $\frac{d}{dt}e^{tA} = \lim_{s\to 0} \frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s}$. Se tiene

$$\frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s} = e^{tA}\frac{(e^{sA} - I)}{s}$$

Ahora

$$e^{sA} - I = \frac{sA}{1!} + \frac{s^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{s^lA^l}{l!} + \cdots = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{s^lA^l}{l!},$$

por lo que

$$\frac{(e^{sA} - I)}{s} - A = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{s^{l-1}A^l}{l!},$$

y por lo tanto

$$||\frac{(e^{sA} - I)}{s} - A|| \leq |s| \sum_{l=2}^{\infty} \frac{|s|^{l-2}||A||^l}{l!} \leq |s| \sum_{l=2}^{\infty} \frac{||A||^l}{l!},$$

si $0 < |s| \leq 1$, lo cual asumimos sin pérdida de generalidad. Pero entonces

$$||\frac{(e^{sA} - I)}{s} - A|| \leq |s|e^{||A||},$$

de donde $\lim_{s \to 0} ||\frac{(e^{sA} - I)}{s} - A|| = 0$. Se tiene entonces

$$||\frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s} - e^{tA}A|| = ||e^{tA}(\frac{e^{sA} - I}{s} - A)||$$

$$\leq ||e^{tA}||\,||(\frac{e^{sA} - I}{s} - A)|| \leq |s|e^{||A||}||e^{tA}||,$$

que finalmente implica

$$\lim_{s \to 0} ||\frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s} - e^{tA}A|| = 0.$$

Hemos probado entonces que $\frac{d}{dt}e^{tA} = e^{tA}A$, en forma enteramente similar se demuestra que $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

Teorema 5.3. *La solución de la ecuación diferencial vectorial con condición inicial*

$$x' = Ax \quad x(t_0) = c,$$

es

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}c.$$

Demostración 15. Es claro que $x(t_0) = e^{0A}c = c$ y derivando

$$x'(t) = Ae^{(t-t_0)A}c = Ax(t),$$

que termina la demostración

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

De esta forma vemos que por medio de la matriz exponencial podemos escribir la solución general de la ecuación diferencial. En efecto escribamos la matriz $e^{(t-t_0)A} = [x^1(t), \cdots, x^n(t)]$. Entonces $x^i(t) = e^{(t-t_0)A}c^i$, con $c^i = [0, \cdots, 1, \cdots, 0]^t$ y donde el uno va en la posición i, $i = 1, \cdots, n$. Se tiene entonces que cada vector columna $x^i(t)$ es solución de la ecuación diferencial $x' = Ax$, y las soluciones $\{x^1, \cdots, x^n\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ (en $t = t_0$ el Wronskiano correspondiente es 1). Si ahora $c = [c_1, \cdots, c_n]^t$, entonces se tiene

$$e^{(t-t_0)A}c = c_1x^1(t) + \cdots + c_nx^n(t),$$

que es la forma de la solución general.

Si $t_0 = 0$, la solución de la ecuación diferencial vectorial con condición inicial

$$x' = Ax \quad x(0) = c,$$

es dada por

$$x(t) = e^{tA}c = c_1x^1(t) + \cdots + c_nx^n(t).$$

Para una matriz general A puede ser dificil calcular su exponencial por medio de la serie que la define. Vamos ver entonces algunos métodos para evaluar la matriz exponencial.

Un primer caso donde esta exponencial es simple de evaluar es cuando $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ es diagonal, en efecto si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^2 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad A^j = \begin{bmatrix} a_{11}^j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^j \end{bmatrix},$$

de donde aplicando (5.19) es inmediato ver que

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}t} \end{bmatrix}.$$

De aquí que en este caso la solución de

$$x' = Ax \quad x(0) = c,$$

es dada por $x_i(t) = c_i e^{a_{ii}t}, i = 1, \cdots, n$, donde $x(t) = [x_1(t), \cdots, x_n(t)]^t$ y $c = [c_1, \cdots, c_n]^t$.

El caso siguiente en dificultad es cuando $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ es diagonalizable. Nosotros vimos anteriormente el caso cuando A tiene n tiene n valores propios reales y distintos, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, con correspondientes vectores propios $K^1, \cdots, K^n$.

Vimos que en este caso la solución de

$$x' = Ax$$

se puede escribir como

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t)$$

donde $x^1(t), \cdots, x^n(t)$ son las n soluciones linealmente independientes dadas por $x^i(t) = e^{\lambda_i t} K^i, i = 1, \cdots, n$, y c_i, $i = 1, \cdots, n$ son constantes arbitrarias.

Vamos a generalizar ahora esta situación al caso cuando $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ es diagonalizable. De Algebra Lineal se tiene

Teorema 5.4. *Una matriz A $n \times n$ de números reales (o complejos) es similar sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) a una matriz diagonal si y solo si A tiene n vectores propios linealmente independientes en $\mathbb{M}^{n\times n}$ (respectivamente en $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$). En este caso la matriz $\Lambda = \mathcal{K}^{-1} A \mathcal{K}$ es diagonal donde $\mathcal{K}$ es la matriz cuyas columnas están formadas por los n vectores propios de A.*

Teorema 5.5. *Sea $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ una matriz diagonalizable sobre sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) y sea $\Lambda = \mathcal{K}^{-1} A \mathcal{K}$, donde $\mathcal{K}$ y Λ tienen el mismo significado que en el teorema anterior. Entonces*

$$e^A = e^{\mathcal{K}\Lambda\mathcal{K}^{-1}} = \mathcal{K} e^{\Lambda} \mathcal{K}^{-1},$$

Demostración 16. Como $A = \mathcal{K}\Lambda\mathcal{K}^{-1}$, se sigue que $A^2 = \mathcal{K}\Lambda^2\mathcal{K}^{-1}$ y que $A^l = \mathcal{K}\Lambda^l\mathcal{K}^{-1}$, $l \in \mathbb{N}$. Entonces de (5.19), se tiene

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$e^A = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mathcal{K}\Lambda^l\mathcal{K}^{-1}}{l!} = \mathcal{K} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Lambda^l}{l!}\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}e^{\Lambda}\mathcal{K}^{-1}. \blacksquare$$

Para esta matriz A diagonalizable consideremos ahora el correspondiente problema

$$x' = Ax \quad x(0) = c.$$

Llamemos λ_i, $i = 1, \cdots, n$ los valores propios (no necesariamente distintos) y K^i los correspondientes vectores propios. Entonces $\mathcal{K} = [K^1 \cdots K^n]$ y

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Se tiene

$$e^{tA} = \mathcal{K}e^{t\Lambda}\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathcal{K}^{-1}$$

y por lo tanto la solución del problema es

$$x(t) = e^{tA}c = \mathcal{K}e^{t\Lambda}\mathcal{K}^{-1}c = \mathcal{K} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathcal{K}^{-1}c.$$

Notemos de aquí que si ponemos $d = \mathcal{K}^{-1}c$, se tiene

$$x(t) = \mathcal{K}e^{t\Lambda}d = [K^1 \cdots K^n]e^{t\Lambda}d = [K^1 \cdots K^n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} d,$$

y si $d = [d_1, \cdots, d_n]^t$, la solución se puede escribir como

$$x(t) = [K^1 \cdots K^n] \begin{bmatrix} d_1 e^{\lambda_1 t} \\ d_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ d_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = d_1 K^1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + d_n K^n e^{\lambda_n t}.$$

de donde

$$x(t) = d_1 K^1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + d_n K^n e^{\lambda_n t},$$

que es la forma de la solución general que obtuvimos antes.

Ejemplo 5.2. *Consideremos la ecuación diferencial $x' = Ax$ donde*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

En primer lugar estudiamos sus valores propios y resolvemos $\det(A - \lambda I) = 0$. *Usando Maple se obtiene:*

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \quad \textit{con multiplicidad dos},$$

con correspondientes vectores propios

$$K^1 = [1,1,1]^t, \quad K^2 = [1,1,0]^t, \quad K^3 = [1,0,1]^t,$$

donde K^1 corresponde a λ_1 y K^2, K^3 a λ_2. Como estos vectores propios son linealmente independientes la matriz A es diagonalizable. Podemos entonces escribir inmediatamente la solución general como

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + d_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + d_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} d_1 e^t + d_2 e^{2t} + d_3 e^{2t} \\ d_1 e^t + d_2 e^{2t} \\ d_1 e^t + d_3 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Evaluemos ahora la exponencial e^{tA}. Usamos la fórmula

$$e^{tA} = \mathcal{K} e^{t\Lambda} \mathcal{K}^{-1}.$$

Se tiene

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

y por lo tanto

$$e^{t\Lambda} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

También

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando Maple

$$\mathcal{K}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

y

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t & e^t - e^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^t \end{bmatrix},$$

y la solución es

$$x(t) = e^{tA}c.$$

Estudiemos ahora el caso en hay valores propios complejos. Más específicamente supongamos que queremos resolver

$$x' = Ax, \tag{5.20}$$

donde la matriz constante A $n \times n$ tiene componentes reales. Suponemos que A tiene valores propios reales y valores propios complejos (conjugados). Notamos primero

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Proposición 5.4. *Si $w(t)$ es una solución compleja de (5.20) entonces la función vectorial compleja conjugada $\overline{w(t)}$ es también solución.*

Demostración 17. Se tiene que w satisface

$$w'(t) = Aw(t),$$

y como $\overline{w'(t)} = \overline{w(t)}'$ se tiene que

$$\overline{w(t)}' = A\overline{w(t)},$$

que implica el resultado ■

El siguiente es un resultado importante.

Teorema 5.6. *Sea A una matriz real de $n \times n$ y supongamos que*

$$[x_1(t), \cdots, x_p(t), w_1(t), \overline{w_1(t)}, \cdots, w_q(t), \overline{w_q(t)}], \tag{5.21}$$

es una base de soluciones compleja de (5.20), donde $p + 2q = n$, y donde $x_j(t)$, $j = 1, \cdots, p$. son vectores soluciones reales y $w_j(t)$, $\overline{w_j(t)}$, $j = 1, \cdots, q$, son vectores soluciones complejas conjugadas.

Si $w_j(t) = u_j(t) + iv_j(t)$, donde $u_j(t), v_j(t)$ denotan la parte real e imaginaria de $w_j(t)$, $j = 1, \cdots, q$, entonces

$$[x_1(t), \cdots, x_p(t), u_1(t), v_1(t), \cdots, u_q(t), v_q(t)] \tag{5.22}$$

es una base real de soluciones para (5.20).

Demostración 18. Se tiene que

$$u_j(t) = \frac{w_j(t) + \overline{w_j(t)}}{2}, \qquad v_j(t) = \frac{w_j(t) - \overline{w_j(t)}}{2i},$$

por lo que u_j y v_j son soluciones reales de la ecuación. Lo que resta es probar que las soluciones de (5.22) son L.I. Para esto usamos que las soluciones de (5.21) son L. I. Razonamos se la siguiente manera, formamos

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \cdots + a_px_p(t) + b_1u_1(t) + c_1v_1(t)$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$+\cdots + b_q u_q(t) + c_q v_q(t) = 0, \tag{5.23}$$

donde $a_1, \cdots, a_p$, $b_1, \cdots, b_q$, y $c_1, \cdots, c_q$, son constantes reales. Definamos

$$\beta_j = \frac{b_j - ic_j}{2}, \quad \gamma_j = \frac{b_j + ic_j}{2}, \quad j = 1, \cdots, q,$$

entonces

$$b_j u_j(t) + c_j v_j(t) = (\beta_j + \gamma_j) u_j - i(\gamma_j - \beta_j) v_j$$

$$= \beta_j (u_j(t) + iv_j(t)) + \gamma_j (u_j(t) - iv_j(t)) = \beta_j w_j(t) + \gamma_j \overline{w_j(t)}.$$

Reemplazando en (5.23),

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \cdots + a_p x_p(t) + \beta_1 w_1(t) + \gamma_1 \overline{w_1(t)} + \cdots + \beta_q w_q(t) + \gamma_q \overline{w_q(t)} = 0,$$

que implica $a_j = 0$, $j = 1, \cdots, p$, y $\beta_j = \gamma_j = 0$, $j = 1, \cdots, q$. Como esto también implica $b_j = c_j = 0$, $j = 1, \cdots, q$, se termina la demostración ■

Ejercicio. Haga todos los detalles de cálculo.

En lo que sigue vamos a necesitar el siguiente resultado.

Proposición 5.5. *Sean A y B dos matrices reales o complejas $n \times n$, tal que $AB = BA$. Entonces*

(i) $Be^{tA} = e^{tA} B$,

(ii) $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB} = e^{tB} e^{tA}$.

Demostración 19. (i) Se tiene que

$$Be^{tA} = B \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{BA^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l B}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!} B = e^{tA} B.$$

(ii) Usamos el Teorema de existencia y unicidad. Definamos las dos funciones

$$u(t) = e^{t(A+B)} c \qquad v(t) = e^{tA} e^{tB} c,$$

donde c es un vector arbitrario pero fijo. Es inmediato ver que u y v satisfacen el problema con condición inicial

$$z' = (A+B)z, \qquad z(0) = c.$$

Por el Teorema de existencia y unicidad (admitido valido para el caso en que las matrices sean complejas, es elemental extenderlo!) se debe tener entonces que

$$(e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB})c = 0,$$

para todo vector c. Se sigue que (ii) es cierto. ■

Vamos a comenzar a considerar el problema (5.20) cuando la matriz A no es diagonalizable. Será conveniente mirar la matriz real A como en $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$.

Recordemos primero algunos resultados de Algebra Lineal, sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ los valores propios distintos de A. Entonces para cada $i = 1, \cdots, s$

$$Ker(A - \lambda_i I), Ker(A - \lambda_i I)^2, \cdots,$$

forman una cadena creciente de subespacios de $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n}$. Más aun existe un entero positivo p_i, el índice correspondiente a λ_i, tal que

$$Ker(A - \lambda_i I) \subset Ker(A - \lambda_i I)^2 \subset \cdots$$

$$\subset Ker(A - \lambda_i I)^{p_i} = Ker(A - \lambda_i I)^{p_i+1} = Ker(A - \lambda_i I)^{p_i+2} = \cdots$$

Es costumbre poner

$$M_{\lambda_i} = Ker(A - \lambda_i I)^{p_i},$$

el cual se llama el subespacio propio generalizado de λ_i. De Algebra Lineal se tiene el siguiente resultado importante

$$\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n} = M_{\lambda_1} \oplus M_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus M_{\lambda_s}.$$

De esta forma si $c \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n}$ entonces

$$c = \sum_{i=1}^{s} c^i \quad \text{donde} \quad c^i \in M_{\lambda_i}, \tag{5.24}$$

y entonces

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$e^{tA}c = \sum_{i=1}^{s} e^{tA}c^i,$$

y por lo tanto solo tenemos que calcular $e^{tA}c^i$, $i = 1, \cdots, s$. Eliminando por conveniencia de notación los subindices evaluemos $e^{tA}c$ donde suponemos $c \in M_\lambda$, λ valor propio de A. Se tiene

$$e^{tA}c = e^{t(A-\lambda I)+t\lambda I}c = e^{t(A-\lambda I)}e^{t\lambda I}c = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}c = e^{t\lambda}e^{t(A-\lambda I)}c.$$

Ahora

$$e^{t(A-\lambda I)}c = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l(A-\lambda I)^l}{l!}c = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{t^l(A-\lambda I)^l}{l!}c,$$

donde p es índice de λ, por lo que se cumple

$$Ker(A-\lambda I) \subset Ker(A-\lambda I)^2 \subset \cdots$$

$$\subset Ker(A-\lambda I)^p = Ker(A-\lambda I)^{p+1} = Ker(A-\lambda_i I)^{p+2} = \cdots .$$

La serie se vuelve una sumatoria finita porque $c \in M_\lambda = Ker(A-\lambda I)^p$, lo cual implica

$$0 = (A-\lambda I)^p c = (A-\lambda I)^{p+1}c = \cdots = (A-\lambda_i I)^j c,$$

para todo $j \geq p$. De estos resultados se tiene

$$e^{tA}c = e^{t\lambda}e^{t(A-\lambda I)}c = e^{t\lambda}\sum_{l=0}^{p-1}\frac{t^l(A-\lambda I)^l}{l!}c$$

$$= e^{t\lambda}(I + \frac{t(A-\lambda I)}{1!} + \frac{t^2(A-\lambda I)^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{p-1}(A-\lambda I)^{p-1}}{(p-1)!})c.$$

Hemos entonces demostrado el siguiente teorema.

Teorema 5.7. *Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ los valores propios distintos de una matriz A, $n\times n$, $M_{\lambda_1}, \cdots, M_{\lambda_s}$ los correspondientes espacios propios generalizados y $p_1, \cdots, p_s$ los respectivos indices.*

Entonces la solución del problema con condición inicial

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$x' = Ax, \quad x(0) = c,$$

es dada por

$$x(t) = \sum_{i=1}^{s} e^{t\lambda_i} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j (A - \lambda_i I)^j}{j!} c^i, \tag{5.25}$$

donde $c^i \in M_{\lambda_i}$ son determinados por la descomposición de c dada en (5.24).

Un resultado importante de Algebra Lineal dice que $\dim M_{\lambda_i} = m_i$ donde m_i es la multiplicidad de λ_i en el polinomio característico de A.

Vamos ahora a estudiar mas en detalle la aplicación de la fórmula (5.25). Supongamos que tenemos dada una matriz A $n \times n$ que tiene s valores propios $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ con multiplicidades $m_1, \cdots, m_s$ (en el polinomio característico). Para aplicar la fórmula (5.25) vemos que tenemos que conocer los indices p_i así como una base de M_{λ_i}, $i = 1, \cdots, s$. Una forma de hacer esto, que lo vamos a explicar para el caso del valor propio λ_i, es la siguiente.

Comenzamos determinando una base para $Ker(A - \lambda_i I)$. Supongamos que $\dim Ker(A - \lambda_i I) = q_1^i$. Entonces A tiene q_1^i vectores propios. Si $q_1^i = m_i$ estamos listos, ya que en este caso $M_{\lambda_i} = Ker(A - \lambda_i I)$. Si $q_1^i < m_i$, entonces $Ker(A - \lambda_i I) \subset M_{\lambda_i}$ con contención estricta y por lo tanto tenemos que completar la base de M_{λ_i}.

Estudiamos entonces $Ker(A - \lambda_i I)^2$ y hecho esto supongamos que $\dim Ker(A - \lambda_i I)^2 = q_2^i$. Notamos aquí que los vectores de la base de $Ker(A - \lambda_i)$ que hemos determinado son también parte de $Ker(A - \lambda_i I)^2$. Así que para determinar la base de este ultimo espacio hay que determinar solamente $q_2^i - q_1^i$ vectores linealmente independientes adicionales.

Continuando de esta forma tenemos que encontrar una base para $Ker(A - \lambda_i I)^j$. Supongamos que hemos encontrado que la dimensión de este espacio es q_j^i. Como antes para la determinación de la correspondiente base solo necesitamos determinar $q_j^i - q_{j-1}^i$ vectores linealmente independientes adicionales , por la misma razón anterior. Encontrados estos vectores, se tiene que en este paso conocemos q_j^i vectores linealmente independientes que son elementos de $Ker(A - \lambda_i)^{p_i}$, y que por lo tanto son todos vectores propios generalizados.

El proceso termina cuando $q_j^i = m_i$. De esta forma se ha determinado la base de M_{λ_i} y al mismo tiempo el índice p_i, ya que $p_i = j$.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

¿Cómo se genera entonces la base correspondiente de soluciones de la ecuación diferencial?

Supongamos que $c = \sum_{m=1}^{s} c^m$ con $c^m \in M_{\lambda_m}$ es tal que $c = h_1^l \in Ker(A - \lambda_i I)$, $l = 1, \cdots, q_1^i$. Entonces $c^m = 0$, $m \neq i$ y $c^i = h_1^l$. Reemplazando en (5.25) se obtienen las siguientes soluciones

$$x_1^l(t) = \sum_{m=1}^{s} e^{t\lambda_m} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j(A-\lambda_m I)^j}{j!} c^m$$

$$= e^{t\lambda_i} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j(A-\lambda_i I)^j}{j!} h_1^l = h_1^l e^{t\lambda_i}, \qquad l = 1, \cdots, q_1^i.$$

Sean ahora $c = h_2^l \in Ker(A - \lambda_i)^2$, $l = q_1^i + 1, \cdots, q_2^i$, los vectores propios generalizados linealmente independientes adicionales que no son vectores propios. Reemplazando en (5.25), se obtiene

$$x_2^l(t) = \sum_{m=1}^{s} e^{t\lambda_m} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j(A-\lambda_m I)^j}{j!} c^m = e^{t\lambda_i} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j(A-\lambda_i I)^j}{j!} h_2^l$$

$$= e^{t\lambda_i}(I + \frac{t(A-\lambda_i I)}{1!}) h_2^l, \qquad l = q_1^i + 1, \cdots, q_2^i.$$

Seguimos de esta forma hasta que llegamos al paso k donde $q_k^i = m_i$, con lo que $k = p_i$ y nos falta por determinar $m_i - q_{k-1}^i$ soluciones. Sean entonces $h_k^l \in Ker(A - \lambda_i)^k$, $l = q_{k-1}^i + 1, \cdots, q_k^i$, los vectores propios generalizados linealmente independientes que no están en $Ker(A - \lambda_i)^{k-1}$. Reemplazando en (5.25), se obtienen las soluciones faltantes siguientes

$$x_k^l(t) = \sum_{i=1}^{s} e^{t\lambda_i} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j(A-\lambda_i I)^j}{j!} h_k^l = e^{t\lambda_i}(I + \frac{t(A-\lambda_i I)}{1!} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{t^{p_i-1}(A-\lambda_i I)^{p_i-1}}{(p_i-1)!}) h_k^l, \qquad l = q_{k-1}^i + 1, \cdots, q_k^i.$$

Ejercicio. Demuestre que todas estas soluciones encontradas son linealmente independientes.

Hagamos algunos problemas.

Ejemplo 5.3. *Queremos estudiar el caso en que la matriz A, 3×3 tiene valores propios reales $\lambda_1 = \lambda_2$ y λ_3, pero asociados a $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ hay un solo vector propio.*

En este caso tenemos inmediatamente las dos soluciones linealmente independientes dadas por $x^1(t) = K^1e^{\lambda_1 t}$ y $x^3(t) = K^3e^{\lambda_3 t}$ donde K^1 y K^3 son vectores propios correspondientes a λ_1 y a λ_3, respectivamente.

Para completar la base de soluciones, que sabemos tiene dimensión 3, razonamos como antes. Tenemos que estudiar $M_{\lambda_1} = Ker(A-\lambda_1 I)^2$ que sabemos que tiene dimensión 2. Sabemos también que $K^1 \in Ker(A-\lambda_1 I) \subset Ker(A-\lambda_1 I)^2$. Asi que nos falta un vector $P \in Ker(A-\lambda_1 I)^2$ que sea linealmente independiente con K^1, que por lo demás sabemos que existe.

Formemos entonces

$$(A-\lambda_1 I)^2P = 0.$$

Pongamos

$$V = (A-\lambda_1 I)P,$$

entonces

$$(A-\lambda_1 I)V = (A-\lambda_1 I)^2P = 0,$$

con lo que V es un vector propio y por lo tanto $V = CK^1$. Asi P satisface

$$(A-\lambda_1 I)P = CK^1.$$

Claramente podemos tomar $C = 1$ redefiniendo P. Se tiene

$$(A-\lambda_1 I)P = K^1.$$

Esta ultima ecuación la miramos entonces como una ecuación para P. Conocido este P la correspondiente solución será

$$x^2(t) = e^{t\lambda_1}(I + \frac{t(A-\lambda_i I)}{1!})P = e^{t\lambda_1}P + e^{t\lambda_1}t(A-\lambda_i I)P = e^{t\lambda_1}P + te^{t\lambda_1}K^1.$$

Se tiene entonces que la solución general de la ecuación es

$$x(t) = c_1x^1(t) + c_2x^2(t) + c_3x^3(t) = c_1K^1e^{\lambda_1 t} + c_2(e^{t\lambda_1}P + te^{t\lambda_1}K^1) + c_3K^3e^{\lambda_3 t},$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes arbitrarias.

En algunos libros y basado en lo que hicimos anteriormente, para encontrar la segunda solución para λ_1 se intenta una solución de la forma:

$$x(t) = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}$$

con

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo en la ecuación $x' = Ax$, se tendrá una solución de esta forma si K y P satisfacen respectivamente

$$(A-\lambda_1 I)K = 0,$$

$$(A-\lambda_1 I)P = K.$$

Así K debe ser un vector propio (que tomamos como K^1) y P es solución de la segunda ecuación. Claramente esto conduce a lo mismo que hemos hecho antes.

Ejemplo 5.4. *Consideremos el sistema*

$$x' = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} x.$$

Se tiene que $\det(A-\lambda I) = 0$, *nos da los valores propios* $\lambda_1 = 0$ *y* $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$. *Evaluando los vectores propios correspondientes a* λ_1, *obtenemos que* $K^1 = [1, \frac{5}{4}, \frac{-1}{2}]^t$ *es un vector propio (normalizado). Mientras que para* $\lambda_2 = \lambda_3$ *existe un solo vector propio* $K^2 = [2, 0, -1]^t$ *(normalizado).*

Resolviendo ahora P *de la ecuación*

$$(A-5I)P = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

se obtiene que $P_2 = \frac{-1}{2}$ *y* $P_1 = 5P_2 - 2P_3 = \frac{-5}{2} - 2P_3$. *Tomamos* $P_3 = -1$ *se tiene* $P_1 = \frac{-1}{2}$, *por lo que* $P = [\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, -1]^t$.

De esta forma obtenemos la solución

$$x^3(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} te^{5t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} e^{5t}.$$

Finalmente la solución general es

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{5t} + c_3 [\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} te^{5t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} e^{5t}],$$

donde c_1, c_2, c_3 *y* c_4 *con constantes arbitrarias.*

A continuación suponemos que en la ecuación $x' = AX$ A es una matriz real 4×4. Como siempre estudiamos primero las raices de $\det(A-\lambda I) = 0$ y vamos a considerar en cierto detalle los distintos casos posibles. En lo que sigue y hasta nuevo aviso vamos a suponer que los valores propios son reales.

CASO 1. $\det(A-\lambda I) = 0$ tiene cuatro valores propios reales y distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$. Estos dan origen respectivamente a los 4 vectores propios $K^1, \ldots, K^4$, con lo que

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

podemos generar las 4 soluciones linealmente independientes

$$x^i = K^i e^{\lambda_i t} \qquad i = 1, \ldots, 4,$$

de donde la solución general de la ecuación es

$$x(t) = \sum_{i=1}^{4} c_i K^i e^{\lambda_i t}$$

con $c_1, \ldots, c_4$ constantes arbitrarias.

CASO 2. $\det(A - \lambda I) = 0$ tiene como valores propios (reales) $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 \neq \lambda_4$. Denotando por K^3 Y K^4 los vectores propios correspondientes respectivamente a λ_3 y λ_4, tenemos dos casos a considerar.

-($2i$) El espacio propio correspondiente a $\lambda_1 = \lambda_2$, tiene dimensión 2, por lo que hay 2 vectores K^1, K^2 que generan este espacio propio. La solución general es entonces dada por

$$x(t) = c_1 K^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K^2 e^{\lambda_2 t} + c_3 K^3 e^{\lambda_3 t} + c_4 K^4 e^{\lambda_4 t}.$$

-($2ii$) El espacio propio de λ_1 tiene dimensión uno. Tenemos entonces inmediatamente las soluciones $x^1(t) = K^1 e^{\lambda_1 t}$, $x^3(t) = K^3 e^{\lambda_3 t}$ y $x^4(t) = K^4 e^{\lambda_4 t}$. Por lo que para completar la base de soluciones nos falta una solución. Pero este caso es exactamente como en el ejemplo anterior asi que sabemos que esta solución tiene la forma

$$x^2(t) = K^1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t},$$

donde P es una solución de la ecuación

$$(A - \lambda_1 I)P = K^1$$

Se obtiene así la solución

$$x_2(t) = K^1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t},$$

que completa la base de soluciones.

CASO 3. $\det(A - \lambda I) = 0$ tiene dos valores propios con multiplicidad dos, que son $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\lambda_3 = \lambda_4$ Aquí de nuevo hay subcasos.

-($3i$) Los espacios propios correspondientes a λ_1 y λ_3 tienen dimensión 2. En este caso hay 4 vectores linealmente independientes con lo que la solución general se construye inmediatamente.

-($3ii$) El espacio propio correspondiente a λ_1 es de dimensión 1 y el correspondiente a λ_3 tiene dimensión 2. En este caso conocemos 3 vectores propios : K^1

correspondiente a λ_1, K^3 y K^4 correspondiente respectivamente a $\lambda_3 = \lambda_4$. Entonces $K^1 e^{\lambda_1 t}$, $K^3 e^{\lambda_3 t}$ y $K^4 e^{\lambda_3 t}$ son tres soluciones linealmente independientes del problema. La otra solución la generamos por medio de

$$x^2(t) = K^1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t}$$

donde P es solución de

$$(A - \lambda_1 I)P = K^1,$$

y hemos completado la base de soluciones.

-(3*iii*) Los espacios propios correspondiente a $\lambda_1 = \lambda_2$ y a $\lambda_3 = \lambda_4$ tienen dimensión 1. En este caso tenemos inmediatamente las soluciones $x^1(t) = K^1 e^{\lambda_1 t}$ y $x^3(t) = K^3 e^{\lambda_3 t}$, donde K^1 y K^3 vectores propios correspondientes a λ_1 y λ_3 respectivamente, a los que agregamos, en la forma usual, las soluciones

$$\begin{aligned} x^2(t) =& K^1 t e^{\lambda_1 t} + P^1 e^{\lambda_1 t} \qquad \text{con} \qquad (A - \lambda_1 I)P^1 = K^1 \\ x^4(t) =& K^3 t e^{\lambda_3 t} + P^3 e^{\lambda_3 t} \qquad \text{con} \qquad (A - \lambda_3 I)P^3 = K^3, \end{aligned}$$

las cuales completan la base.

CASO 4. $\det(A - \lambda I) = 0$ tiene los valores propios λ_1 con multiplicidad 3 y λ_4 con multiplicidad 1. De esta manera podemos formar inmediatamente las dos soluciones $x^1(t) = K^1 e^{\lambda_1 t}$ y $x^4(t) = K^4 e^{\lambda_4 t}$, con K^1 y K^4 vectores propios correspondientes a λ_1 y λ_4 respectivamente.

Para generar las otras dos soluciones consideramos distintos casos.

(4*i*) Supongamos que el espacio propio de λ_1 tiene dimensión 1, entonces tenemos que mirar por $M_{\lambda_1} = Ker(A - \lambda_1 I)^{p_1}$ donde p_1 es el indice de λ_1. Es claro que $p_1 = 2$ o 3.

Si $p_1 = 2$ entonces $\dim Ker(A - \lambda_1 I)^2 = 3$ y tal como antes los dos vectores propios generalizados que faltan se encuentran de resolver

$$(A - \lambda_1 I)P = K^1.$$

De aqui se obtienen P^1, P^2 tal que $\{K^1, P^1, P^2\}$ forman una base de $Ker(A - \lambda_1 I)^2$. Las soluciones faltantes son entonces

$$x^2(t) = K^1 t e^{\lambda_1 t} + P^1 e^{\lambda_1 t}, \quad x^3(t) = K^1 t e^{\lambda_1 t} + P^2 e^{\lambda_1 t}.$$

Si ahora $p_1 = 3$ entonces $\dim Ker(A - \lambda_1 I)^2 = 2$ y podemos encontrar una solución tal como antes resolviendo

$$(A - \lambda_1 I)P = K^1,$$

que nos va a dar un vector propio generalizado P linealmente independiente con K^1. Esto nos da una tercera solución

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$x^2(t) = K^1 te^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}.$$

Para obtener la otra solución uno puede proceder de la siguiente forma. (Ej. Justifique rigurosamente estos pasos por la teoria desarrollada). Suponemos que la solución tiene la forma

$$x(t) = L_1 \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} + L_2 te^{\lambda_1 t} + L_3 e^{\lambda_1 t},$$

y reemplazamos esta expresión en $x' = Ax$. Se obtiene que va a existir una solución de esta forma si los vectores L_1, L_2, y L_3 satisfacen las siguientes ecuaciones.

$$(A - \lambda_1 I)L_1 = 0,$$

$$(A - \lambda_1 I)L_2 = L_1,$$

$$(A - \lambda_1 I)L_3 = L_2.$$

Como es usual tomamos $L_1 = K^1$, $L_2 = P^1$, ya determinados en el paso previo, y resolvemos la tercera ecuación para L_3 Sea $L_3 = Q$, la solución. De esta forma la solución faltante queda entonces

$$x^3(t) = K^1 \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} + P^1 te^{\lambda_1 t} + Qe^{\lambda_1 t}.$$

$(4ii)$ Dimensión del $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) = 2$. En este caso hay otro vector propio K^2 linealmente independiente con K^1, y que da origen a la solución $x^2(t) = K^2 e^{\lambda_2 t}$. Notamos que en este caso se debe tener que $\dim Ker(A - \lambda_1 I)^2 = 3$. Como antes miramos por una solución de

$$(A - \lambda_1 I)^2 P = 0,$$

que sea linealmente independiente con K^1, K^2. Haciendo $V = (A - \lambda_1 I)P$, se obtiene que existen constantes reales μ_1, μ_2 tales que $V = \mu_1 K^1 + \mu_2 k^2$. Por supuesto en esta etapa μ_1, μ_2 no son conocidos, sin embargo se resuelve la ecuación

$$(A - \lambda_1 I)P = \mu_1 K^1 + \mu_2 K^2.$$

y μ_1, μ_2 se fijan tales que P, K^1, K^2 sean vectores linealmente independientes.

La solución que falta para completar la base viene dada entonces por

$$x^3(t) = (\mu_1 K^1 + \mu_2 K^2)te^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}.$$

$(4iii)$ Dimensión del $Ker(A - \lambda_1 I) = 3$, entonces existen 3 vectores propios K^1, K^2, K^3. Este caso se deja al lector ya que es muy simple

CASO 5. $\det(A-\lambda I)=0$ tiene un solo valor propio real de multiplicidad 4, por lo que una solución de la base de soluciones es dada por

$$x^1(t)=K^1e^{\lambda_1 t},$$

donde K^1 en vector propio (normalizado) correspondiente a λ_1.

Este caso se deja de ejercicio.

Pasamos ahora a examinar algunos ejemplos donde el polinomio característico tiene valores propios complejos.

Ejemplo. Consideremos la ecuación $x'=Ax$ donde A es una matriz real 2×2 que suponemos tiene dos valores propios complejos conjugados $\lambda_1=\alpha+i\beta$ y $\lambda_2=\alpha-i\beta$, con $\beta\neq 0$.

Para λ_1 evaluamos su correspondiente vector propio K a partir de

$$(A-\lambda_1 I)K=0.$$

Como la matriz A es real se tiene que $\overline{K}$, vector complejo conjugado de K, es un vector propio correspondiente a $\overline{\lambda_1}=\lambda_2$. Note que K y $\overline{K}$, son dos vectores linealmente independientes para los escalares complejos. Pongamos $K=K^1+iK^2$ donde K^1 y K^2 son respectivamente la parte real e imaginaria de K, de aquí $\overline{K}=K^1-iK^2$. Correspondiente a λ_1 y λ_2 tenemos respectivamente las soluciones

$$w^1(t)=e^{\lambda_1 t}K \qquad w^2(t)=e^{\lambda_2 t}\overline{K}=\overline{w^1(t)},$$

que son dos soluciones complejas conjugadas. Entonces por Teorema 5.6 se tiene que la base real de soluciones está formada por la parte real e imaginaria de $w^1(t)$, que procedemos a evaluar. Se tiene

$$\begin{aligned} w^1(t) &= e^{\alpha t}(K^1+iK^2)(\cos\beta t+i\sin\beta t),\\ &= e^{\alpha t}[K^1\cos\beta t-K^2\sin\beta t)]+ie^{\alpha t}[K^1\sin\beta t+K^2\cos\beta t]. \end{aligned}$$

Así

$$x^1(t)=e^{\alpha t}[K^1\cos\beta t-K^2\sin\beta t] \tag{5.26}$$

y

$$x^2(t)=e^{\alpha t}[K^1\sin\beta t+K^2\cos\beta t]. \tag{5.27}$$

La solución general de la ecuación diferencial es entonces

$$x(t)=c_1x^1(t)+c_2x^2(t)=c_1e^{\alpha t}[K^1\cos\beta t-K^2\sin\beta t]+c_2e^{\alpha t}[K^1\sin\beta t+K^2\cos\beta t],$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

Vamos a considerar ahora el problema de la ecuación $x' = Ax$ donde A es una matriz real 4×4 que tiene cuatro valores propios complejos (con parte imaginaria no nula) λ_1, λ_2, λ_3, y λ_4, donde notamos que necesariamente debemos tener (excepto por notación de los valores propios) que $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ y $\lambda_3 = \overline{\lambda_4}$.

Los casos a considerar se reducen a solo dos: (i) cuando $\lambda_1 \neq \lambda_3$, y (ii) cuando $\lambda_1 = \lambda_3$.

En el caso (i) tendremos 4 valores propios complejos que escribimos como $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1$, $\lambda_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ y $\lambda_4 = \alpha_3 - i\beta_3$.

Asociado con λ_1 tenemos el vector propio H^1, con λ_2 el vector propio $H^2 = \overline{H^1}$, con λ_3 el vector propio H^3, y con λ_4 el vector propio $H^4 = \overline{H^3}$.

Las correspondientes soluciones (complejas) son $w^1(t) = H^1 e^{\lambda_1 t}$, $w^2(t) = H^2 e^{\lambda_2 t} = \overline{H^1} e^{\overline{\lambda_1} t} = \overline{w^1(t)}$, $w^3(t) = H^3 e^{\lambda_3 t}$, y $w^4(t) = \overline{H^3} e^{\overline{\lambda_3} t} = \overline{w^3(t)}$.

Escribamos $H^1 = K^1 + iK^2$ y $H^3 = K^3 + iK^4$, donde K^1 y K^2 son la parte real e imaginaria respectivamente de H^1 y K^3, K^4 son la parte real e imaginaria respectivamente de H^3.

Como antes para calcular la base de soluciones tenemos que calcular la parte real e imaginaria de $w^1(t)$ y $w^3(t)$. Estas quedan dadas respectivamente por

$$x^1(t) = \frac{w^1(t) + \overline{w^1(t)}}{2}, \qquad x^2(t) = \frac{w^1(t) - \overline{w^1(t)}}{2i},$$

y

$$x^3(t) = \frac{w^3(t) + \overline{w^3(t)}}{2}, \qquad x^4(t) = \frac{w^3(t) - \overline{w^3(t)}}{2i}.$$

Se tiene que la solución general es

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + c_3 x^3(t) + c_4 x^4(t),$$

donde c_1, c_2 c_3 y c_4 son constantes reales arbitrarias.

Consideremos finalmente el caso (ii). Suponemos entonces que $\lambda_1 = \lambda_3$ por lo que $\lambda_2 = \lambda_4$. De esta forma λ_1 y λ_2 son valores propios complejos conjugados con multiplicidad dos.

Hay que considerar dos casos: (a) $\dim Ker(A - \lambda_1 I) = 1$ y por lo tanto $\dim\mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I) = 1$ y (b) $\dim\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) = 2$ y por lo tanto $\dim\mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I) = 2$.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

En el caso (b) hay dos vectores propios asociados con $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, que escribimos como $H^1 = K^1 + iK^2$ y $H^2 = K^3 + iK^4$. De aquí que asociados con $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, tengamos los vectores propios $\overline{H^1} = K^1 - iK^2$ y $\overline{H^2} = K^3 - iK^4$.

Correspondiendo a λ_1 y $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ tenemos respectivamente las soluciones

$$w^1(t) = H^1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{y} \quad w^2(t) = \overline{H^1} e^{\overline{\lambda_1} t},$$

y

$$w^3(t) = H^2 e^{\lambda_1 t} \quad \text{y} \quad w^4(t) = \overline{H^2} e^{\overline{\lambda_1} t}.$$

Como antes, tomando parte real e imaginaria de $w^1(t)$ y $w^3(t)$, obtenemos la base de soluciones formada por las siguientes cuatro soluciones reales

$$\begin{aligned}
x^1(t) &= [(\cos\beta t)K^1 - (\sin\beta t)K^2]e^{\alpha t}, \\
x^2(t) &= [(\sin\beta t)K^1 + (\cos\beta t)K^2]e^{\alpha t}, \\
x^3(t) &= [(\cos\beta t)K^3 - (\sin\beta t)K^4]e^{\alpha t}, \\
x^4(t) &= [(\sin\beta t)K^3 + (\cos\beta t)K^4]e^{\alpha t}.
\end{aligned}$$

Ejercicio. Demuestre directamente que estas cuatro soluciones son linealmente independientes.

Consideremos finalmente el caso (a) donde tenemos que $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ son valores propios de multiplicidad dos y correspondientes a cada uno de ellos hay un solo vector propio asociado. Si como siempre $H^1 = K^1 + iK^2$ y $H^2 = \overline{H^1} = K^1 - iK^2$ denotan respectivamente estos vectores propios, entonces las funciones $w^1(t) = H^1 e^{\lambda_1 t}$ y $w^2(t) = H^2 e^{\lambda_2 t} = \overline{H^1} e^{\overline{\lambda_1} t}$ son soluciones complejas de $x' = Ax$. Estas soluciones complejas dan origen, en la forma acostumbrada, a las dos soluciones reales, parte de la base de soluciones:

$$x^1(t) = (K^1 \cos\beta t - K^2 \sin\beta t)e^{\alpha t}$$

y

$$x^2(t) = (K^1 \sin\beta t + K^2 \cos\beta t)e^{\alpha t}.$$

Continuamos evaluando el resto de las soluciones complejas. Para esto tenemos que encontrar un vector propio generalizado que sea linealmente independiente con H^1 y que este en $Ker(A - \lambda_1 I)^2$. Tal como en el caso de valores propios reales, esto se puede hacer suponiendo la solución faltante tiene la forma

$$w^2(t) = H^1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t}.$$

Reemplazando en $x' = Ax$ tendremos una solución de esta forma si P es una solución de la ecuación

$$(A - \lambda_1 I)P = H^1,$$

que esta vez nos da un vector complejo. Poniendo $P = P^1 + iP^2$ se tiene que las soluciones compleja faltantes son

$$w^3(t) = (K^1 + iK^2)te^{\lambda_1 t} + (P^1 + iP^2)e^{\lambda_1 t}$$

y

$$w^4(t) = (K^1 - iK^2)te^{\overline{\lambda_1} t} + (P^1 - iP^2)e^{\overline{\lambda_1} t} = \overline{w^3(t)}.$$

Razonando como antes, es decir tomamos la parte real e imaginaria de $w^3(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned} w^3(t) =& (K^1 + iK^2)(\cos\beta t + i\sin\beta t)te^{\alpha t} + (P^1 + iP^2)(\cos\beta t + i\sin\beta t)e^{\alpha t} \\ =& (K^1\cos\beta t - K^2\sin\beta t)te^{\alpha t} + (P^1\cos\beta t - P^2\sin\beta t)e^{\alpha t} \\ &+ i(K^1\sin\beta t + K^2\cos\beta t)te^{\alpha t} + i(P^1\sin\beta t + P^2\cos\beta t)e^{\alpha t} \end{aligned}$$

de donde las soluciones reales faltantes son

$$x^3(t) = (K^1\cos\beta t - K^2\sin\beta t)te^{\alpha t} + (P^1\cos\beta t - P^2\sin\beta t)e^{\alpha t}$$

y

$$x^4(t) = (K^1\sin\beta t + K^2\cos\beta t)te^{\alpha t} + (P^1\sin\beta t + P^2\cos\beta t)e^{\alpha t}.$$

Finalmente la solución general es dada por

$$x(t) = \sum_{i=1}^{4} c_1 x^i(t),$$

donde $c_1, \ldots, c_4$ son constantes reales arbitrarias.

A continuación queremos estudiar lo siguiente. Conocida una base de solución de

$$x' = Ax \tag{5.28}$$

se quiere encontrar la matriz exponencial correspondiente.

Sea $\{x^1, \ldots, x^n\}$ esta base. Entonces toda solución de (5.28) se escribe como

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t).$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

En particular si y^l es la solución de (5.28) correspondiente a la condición inicial $d^l = [0 \ldots 1 \ldots 0]^t$, $l = 1, \ldots, n$, donde el uno va en la posición l, van a existir constantes c_i^l, $i = 1, \ldots, n$, tal que

$$y^l(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^l x^i(t).$$

Para cada $l = 1, \ldots, n$, usando la condición inicial, podemos formar un sistema de ecuación algebraicas para determinar las constantes c_i^l, $i = 1, \ldots, n$. Este es

$$y^l(0) = d^l = \sum_{i=1}^{n} c_i^l x^i(0). \tag{5.29}$$

Si n es pequeño es mejor calcular las constantes directamente, sino se puede usar por ejemplo Maple. De esta forma conocemos las soluciones y^l, $l = 1, \ldots, n$.

Vamos probar que la matriz

$$Y(t) = [y^1(t) \ldots y^n(t)]$$

es la matriz exponencial. Se tiene

$$Y'(t) = [(y^1)'(t) \ldots (y^n)'(t)] = [Ay^1(t) \ldots Ay^n(t)]$$

$$= A[y^1(t) \ldots y^n(t)] = AY(t).$$

Así Y satisface una ecuación diferencial matricial, con la condición inicial $Y(0) = [d^1 \ldots d^n] = I$, y por lo tanto es solución del problema

$$X' = AX, \qquad X(0) = I. \tag{5.30}$$

donde para cada $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ es una matriz $n \times n$. Por otro lado si podemos demostrar que la matriz exponencial es solución de este mismo problema, entonces por el teorema de unicidad de soluciones generalizado a ecuación diferenciales matriciales, vamos a tener que $e^{tA} = Y(t)$.

Pero hemos demostrado que $(e^{tA})' = Ae^{tA}$ y $e^{0A} = I$ por lo que es claro que e^{tA} es solución de (5.30). Esto nos da un método para calcular la matriz exponencial. Nos falta extender el teorema de existencia y unicidad a ecuación diferenciales matriciales.

Se tiene

Teorema 5.8. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean $A : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times n}$ y $F : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times n}$ dos funciones continuas. El problema diferencial matricial*

$$(CI_m) \qquad \begin{cases} X' = A(t)X + F(t) \\ X(t_0) = C, \quad t_0 \in I, \end{cases}$$

tiene una única solución definida en el intervalo I.

Demostración 20. Es consecuencia directa del teorema similar para ecuaciones diferenciales vectoriales. En efecto poniendo

$$X(t) = [x^1(t) \dots x^n(t)] \qquad F(t) = [f^1(t) \dots f^n(t)]$$

el problema (CI_m) se puede escribir como

$$X'(t) = [(x^1)'(t) \cdots (x^n)'(t)] = A(t)[x^1(t) \cdots x^n(t)] + [f^1(t) \cdots f^n(t)]$$

$$= [A(t)x^1(t) + f^1(t) \cdots A(t)x^n(t) + f^n(t)],$$

$$X(t_0) = [x^1(t_0) \cdots x^n(t_0)] = C = [c^1(t) \cdots c^n(t)],$$

donde c^l, $l = 1, \dots, n$ son las columnas de la matriz C. Es claro entonces que el problema (CI_m) es equivalente a las n ecuaciones diferenciales vectoriales con condición inicial

$$(x^l(t))' = A(t)x^l(t) + f^l(t), \qquad x^l(t_0) = c^l, \qquad l = 1, \dots, n. \tag{5.31}$$

Por el teorema usual de existencia y unicidad, para cada $l = 1, \dots, n$, el problema (5.31) tiene una única solución definida en I lo que implica obviamente la existencia y unicidad para el sistema (CI_m).

Vamos a aprovechar de dar una definición. Consideremos nuevamente la ecuación diferencial vectorial.

$$x' = A(t)x$$

y formemos la ecuación matricial asociada

$$X' = A(t)X. \tag{5.32}$$

Entonces toda solución de esta ultima ecuación cuyas columnas sean soluciones linealmente independientes la vamos a llamar una matriz fundamental. Para esto basta que $X(t)$ sea una solución con una condición inicial $X(t_0) = C$ donde C es una matriz de constantes reales $n \times n$ con sus columnas linealmente independientes. La razón es la siguiente. Sean como antes $d^l = [0, \ldots, 1, \ldots, 0]^t$, $l = 1, \ldots, n$, donde el uno va en la posición l, los elementos de la base canónica y formemos $x^l(t)) = X(t)d^l$, que forman las columnas de $X(t)$. Se tiene que

$$(x^l)'(t) = X'(t)d^l = A(t)X(t)d^l = A(t)x^l(t), \qquad x^l(0) = X(0)d^l = c^l,$$

donde c^l, $l = 1, \ldots, n$ son las columnas de C que las hemos supuesto linealmente independientes Entonces x^l, $l = 1, \ldots, n$, forman un conjunto de soluciones de $x' = A(t)x$ que son linealmente independientes. De aquí encontrar una matriz fundamental es equivalente a encontrar n soluciones linealmente independientes de $x' = A(t)x$. Si $X(t)$ es una matriz fundamental de $x' = Ax$ entonces la solución general se escribe

$$x(t) = X(t)c,$$

donde c es un vector columna arbitrario, $c = [c_1 \cdots c_n]^t$.

Sigamos un poco con matrices fundamentales. Sea $X(t)$ una matriz fundamental de la ecuación (5.32) tal que $X(\tau) = I$. Entonces $Y(t) = X(t)Y(\tau)$ es una solución de (5.32) que es una matriz fundamental si $Y(\tau)$ es una matriz no singular. Derivando $Y'(t) = X'(t)Y(\tau) = AX(t)Y(\tau) = AY(t)$, por lo que es solución. Ahora $X(\tau)Y(\tau) = IY(\tau) = Y(\tau)$, por lo que si esta matriz es no singular entonces $Y(t)$ es una matriz fundamental.

Ejercicios adicionales.

Ejemplo 5.5. *Sea $X(t)$ una matriz fundamental de (5.32) y sea $W(t) = \det X(t) = \det[x^1(t) \cdots x^n(t)]$. Demuestre que*

$$\det X(t) = e^{\int_\tau^t \operatorname{tr} A(s) ds} \det X(\tau)$$

para todo $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Solución. Sea $\tau \in I$ arbitrario, que mantenemos fijo al comienzo. Sea $Y(t) = X(t)X^{-1}(\tau)$. Entonces

$$Y'(t) = X'(t)X^{-1}(\tau) = A(t)X(t)X^{-1}(\tau) = A(t)Y(t) \qquad \text{con} \quad Y(\tau) = I.$$

Se tiene

$$W(t) = W(\tau)\det(Y(t)).$$

Derivando

$$W'(t) = W(\tau)\sum_{i=1} \det[y^1(t)\cdots(y^i)'(t)\cdots y^n(t)].$$

Como $y^i(\tau) = d^i$, $(d^1,\cdots,d^n)$, *representa la base canónica, entonces* $(y^i)'(\tau) = A(\tau)d^i$. *Así*

$$W'(\tau) = W(\tau)\sum_{i=1}^{n} \det[y^1(\tau)\cdots(y^i)'(\tau)\cdots y^n(\tau)]$$

$$= W(\tau)\sum_{i=1}^{n} \det[d^1\cdots A(\tau)d^i\cdots d^n] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\tau) = W(\tau)\mathrm{tr}(A(\tau)),$$

que tomando en cuenta que τ *es arbitrario, se puede escribir como*

$$W'(t) = W(t)\mathrm{tr}(A(t)).$$

Integrando entre t *y* τ *se obtiene*

$$W(t) = e^{\int_\tau^t \mathrm{tr}A(s)ds}W(\tau).$$

que es lo queríamos demostrar.

En particular, si A *es una matriz constante, podemos tomar* e^{tA} *como la matriz fundamental, se tiene*

$$\det e^{tA} = e^{t\,\mathrm{tr}A} \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 5.6. *Considere la ecuación no homogénea* $x' = Ax + be^{\mu t}$, *donde* A *es una matriz real* $n \times n$, b *es un vector constante y* μ *es una constante que no es un valor propio de* A. *Se pide determinar la solución general.*

Se tiene que la solución general se puede escribir como $x(t) = e^{tA}c + x_p(t)$, *donde* $x_p(t)$ *denota una solución particular de la ecuación. Para determinar esta solución intentamos una solución de la forma* $x_p(t) = ve^{\mu t}$, *donde* v *es un vector que queremos determinar. Se tiene*

$$x_p'(t) = \mu ve^{\mu t} = Ave^{\mu t} + be^{\mu t},$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

de donde

$$(A-\mu I)v=-b \quad \textit{que implica} \quad v=-(A-\mu I)^{-1}b,$$

y la solución general es entonces $x(t)=e^{tA}c-e^{\mu t}(A-\mu I)^{-1}b$,
donde lo último se tiene pues μ *no es valor propio de* A*, y la solución general es entonces* $x(t)=e^{tA}c-e^{\mu t}(A-\mu I)^{-1}b$.

Ejemplo 5.7. *Supongamos que la matriz* A*,* $n\times n$*, tiene la forma*

$$A=\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & J_k\end{bmatrix},$$

donde los J_i $i=1,\cdots,k$ *son bloques. Se pide demostrar que*

$$e^{tA}=\begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{tJ_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{tJ_k}\end{bmatrix}.$$

Vamos a dar una demostración distinta a la común , pero interesante. Sea

$$H(t)=\begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{tJ_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{tJ_k}\end{bmatrix},$$

y queremos probar que $H(t)=e^{tA}$*. Para esto derivamos* $H(t)$*, nos da*

$$H'(t)=\begin{bmatrix} J_1e^{tJ_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_2e^{tJ_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & J_ke^{tJ_k}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & J_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{tJ_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{tJ_k}\end{bmatrix}=AH(t).$$

Además $H(0) = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_k \end{bmatrix} = I$. *Así por el teorema de unicidad para ecuaciones matriciales debemos tener que efectivamente* $H(t) = e^{tA}$.

5.4. Sistemas Lineales Planos. Pasemos a estudiar sistemas lineales planos, los cuales corresponden a $n = 2$, y tienen la forma:

$$x' = Ax, \tag{5.33}$$

con A una matriz real dada por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Vamos a suponer que $\det A \neq 0$, lo que nos dice que la única solución de la ecuación $Ax = 0$, es $x = 0$. Esto implica que la solución trivial es la única solución constante de la ecuación y que $\lambda = 0$ no es un valor propio de A.

Por otro lado esto también implica la consecuencia importante que ninguna otra solución de la ecuación puede pasar por el origen en M^2, porque si por ejemplo $x(t)$ es una solución que satisface $x(t_0) = 0$ y $x(t_1) \neq 0$, algún $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ entonces la parte de unicidad del Teorema de Existencia y Unicidad nos dice que $x(t)$ debe ser la solución trivial y por lo tanto $x(t_1) = 0$ lo que no puede ser.

Más generalmente si escribimos $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^t$ y dibujamos la curva correspondiente (t es el parámetro de la curva), en el plano (x_1, x_2), llamado plano de fase, afirmamos que dos soluciones distinta no se pueden intersectar transversalmente en el plano de fase. La razón de esto es la misma que antes y se basa en una aplicación de la parte de unicidad del Teorema de Existencia y Unicidad. El argumento es sin embargo un poco más sutil y se basa en la siguiente propiedad. Sea $x(t)$ una solución que satisface $x(t_0) = c$ algún $t_0 \in \mathbb{R}$ y sea $y(t)$ una solución que satisface $y(t_1) = c$ algún $t_1 \in \mathbb{R}$. Definamos $z(t) = y(t + (t_1 - t_0))$. Entonces es claro que z es también solución de (5.33). Además $z(t_0) = y(t_0 + (t_1 - t_0)) = y(t_1) = c = x(t_0)$, entonces el Teorema de Existencia y Unicidad nos dice que $x(t) = z(t) = y(t + \Delta)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, con $\Delta = t_1 - t_0$. Es claro entonces que en el plano de fase, cuando t va de $-\infty$ a $+\infty$, tanto $x(t)$ como $y(t)$ nos van a dar los mismos puntos, porque son dos parametrizaciones distintas (si $\Delta \neq 0$) de la misma curva. Las curvas solución en el plano de fase la vamos a llamar trayectorias.

Si ahora se tiene que $x(t)$ e $y(t)$ son dos soluciones de (5.33) cuyas trayectorias se intersectan en el plano de fase, esto es existen $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t_0) = y(t_1)$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

entonces el argumento de arriba nos dice que en el plano de fase estas soluciones representan dos parametrizaciones distintas de la misma curva, por lo que no puede haber intersección transversal de estas soluciones en el plano de fase.

Los puntos que satisfacen $Ax = 0$ los vamos a llamar puntos críticos. Recordando que la ecuación $Ax = 0$ (con $\det A \neq 0$) tiene como única solución el punto $(0, 0)$, se tiene que el origen es el único punto crítico en caso que estamos considerando.

Vamos a decir que el origen (punto crítico) es estable si todas las soluciones de la ecuación son acotadas; asintóticamente estable si todas las soluciones tienden al origen cuando $t \to \infty$; inestable si hay la menos una solución que no es acotada. Esta definición depende del intervalo donde estudiemos las soluciones , por ejemplo una trayectoria positiva es definida para $t \in [0, \infty)$, una negativa para $t \in (-\infty, 0]$, etc.

Notemos también que las trayectorias se mueven en el plano de fase en lugares geométricos que quedan definidas por la ecuación

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2},$$

o

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}.$$

La pendiente de la recta tangente a la trayectoria en el punto $(x_1(t), x_2(t))$ esta dada por $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}}$. En cada punto de la trayectoria vamos a asociar una dirección (flecha) por medio del vector $(\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt})$, que nos va a indicar como se mueve la solución a lo largo de la trayectoria cuando t crece.

El polinomio característico de la matriz A es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A.$$

donde $\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22}$. Los valores propios son dados por

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}A + \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A}) \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}A - \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A}).$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Tendremos distintos casos dependiendo si (1) $(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A > 0$, (2) $(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A < 0$ y si (3) $(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A = 0$. En el caso (2) vamos a tener valores propios complejos.

Caso (1). En este caso λ_1 y λ_2 son valores propios reales y distintos. Sean respectivamente K^1 y K^2 los vectores propios correspondientes, que sabemos forman una base en $\mathbb{M}^2$. La solución general queda dada por

$$x(t) = c_1 K^1 e^{t\lambda_1} + c_2 K^2 e^{t\lambda_2}.$$

Formemos, como antes, la matriz $\mathcal{K} = [K^1, K^2]$. Sabemos que poniendo $x(t) = \mathcal{K}y(t)$, entonces se tiene

$$x'(t) = \mathcal{K}y'(t) = Ax(t) = A\mathcal{K}y(t),$$

de donde

$$y'(t) = \Lambda y(t),$$

con

$$\Lambda = (\mathcal{K})^{-1} A\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

ya que

$$A\mathcal{K} = [AK^1, AK^2] = [\lambda_1 K^1, \lambda_2 K^2] = \mathcal{K} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Así si $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^t$ se obtiene el sistema en forma canónica

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t). \end{aligned}$$

La solución de este sistema es

$$y_1(t) = c_1 e^{t\lambda_1}, \quad y_2(t) = c_2 e^{t\lambda_2},$$

donde $c_1 = y_1(0), c_2 = y_2(0)$, son constantes arbitrarias.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Queremos ahora dibujar las curvas soluciones en el plano de fase (y_1, y_2). Hay tres casos: (i) los valores propios son negativos, (ii) los valores propios son positivos, (iii) un valor propio es positivo y el otro es negativo. En el caso (i) el punto critico se llama nodo estable; en el caso (ii) el punto critico se llama nodo inestable y en el caso (ii) el punto critico se llama punto silla.

Para $y_1(0) \neq 0$ y $y_2(0) \neq 0$ las trayectorias describen el lugar geométrico

$$|\frac{y_1}{y_1(0)}|^{\lambda_2} = |\frac{y_2}{y_2(0)}|^{\lambda_1}. \tag{5.34}$$

Si $y_1(0) = 0$, las trayectorias se mueven en el eje y_2 mientras que si $y_2(0) = 0$, las trayectorias se mueven en el eje y_1.

En los casos (i) y (ii), para $y_1(0) \neq 0$ y $y_2(0) \neq 0$ podemos despejar como y_2 como

$$|y_2| = |y_2(0)||\frac{y_1}{y_1(0)}|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \tag{5.35}$$

así que las trayectorias están sobre lugares geométricos en forma de parábolas que tienden al origen en caso (i) o se alejan del origen en caso (ii) cuando t tiende a infinito.

En el caso (iii), para para $y_1(0) \neq 0$ y $y_2(0) \neq 0$ podemos despejar como y_2 como

$$|y_2| = |y_2(0)||\frac{y_1(0)}{y_1}|^{|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|}, \tag{5.36}$$

las trayectorias están sobre lugares geométricos en forma de hipérbolas. El punto critico $(0, 0)$ es inestable.

Caso (2). En este caso los valores propios son complejos conjugados, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Si $H^1 = K^1 + iK^2$ es el vector propio correspondiente a $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, entonces sabemos que una base soluciones esta dada por

$$x^1(t) = (K^1 \cos\beta t - K^2 \sin\beta t)e^{\alpha t}$$

y

$$x^2(t) = (K^1 \sin\beta t + K^2 \cos\beta t)e^{\alpha t},$$

con lo que la solución general queda

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^t = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t),$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Recordemos a continuación que para encontrar la forma canónica de A se procede como sigue. De

$$A(K^1 + iK^2) = (\alpha + i\beta)(K^1 + iK^2),$$

se tiene que

$$AK^1 + iAK^2 = (\alpha K^1 - \beta K^2) + i(\beta K^1 + \alpha K^2),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} AK^1 &= \alpha K^1 - \beta K^2 \\ AK^2 &= \beta K^1 + \alpha K^2. \end{aligned}$$

De aquí la matriz Λ que representa a A según la base $\{K^1, K^2\}$, es

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Notemos que

$$[AK^1, AK^2] = [\alpha K^1 - \beta K^2, \beta K^1 + \alpha K^2],$$

que poniendo $\mathcal{K} = [K^1, K^2]$ se puede escribir como

$$A\mathcal{K} = \mathcal{K} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \mathcal{K}\Lambda,$$

y despejando

$$\Lambda = \mathcal{K}^{-1} A \mathcal{K}.$$

Hagamos el cambio de variable $x = \mathcal{K}y$ con lo que

$$x' = \mathcal{K}y' = A\mathcal{K}y.$$

Se tiene

$$y' = \mathcal{K}^{-1} A \mathcal{K} y = \Lambda y,$$

equivalente si $y = [y_1, y_2]^t$,

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

que es la forma canónica del sistema inicial, cuando A tiene valores propios complejos. Sabemos que la solución de este sistema es dada por

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{t\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = e^{t\alpha} \begin{bmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix}.$$

Equivalentemente

$$y_1(t) = e^{t\alpha}(\cos\beta t\, y_1(0) + \sin\beta t\, y_2(0))$$

$$y_2(t) = e^{t\alpha}(-\sin\beta t\, y_1(0) + \cos\beta t\, y_2(0)).$$

De aquí

$$\sqrt{y_1(t)^2 + y_2(t)^2} = e^{t\alpha}\sqrt{(y_1(0)^2 + y_2(0)^2)}.$$

Entonces si $\alpha > 0$ las trayectorias tienden en forma espiral a ∞ cuando $t \to \infty$, decimos en este caso que el origen es un foco inestable, mientras que si $\alpha < 0$ las trayectorias tienden en forma espiral a 0 cuando $t \to \infty$, y en este caso decimos que el origen es un foco estable. Si $\alpha = 0$ las trayectorias se mueven en círculos, cuyo radio queda fijado por las condiciones iniciales. En este caso decimos que el origen es estable.

Caso 3. Se deja de ejercicio el encontrar las formas canónicas de los distintos casos así como hacer un esquema de sus respectivos planos de fase.

5.5. Problemas Resueltos.

Ejercicio 5.1. *Resuelva el siguiente sistemas de ecuaciones:*

$$x' = Ax,$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & d \\ 0 & -\frac{bc}{d} & a \end{bmatrix}$$

donde a, b, c y $d \neq 0$ son costantes

Solución:

Obtener los valores propios de la matriz A.

$$|A - \lambda I| = P(\lambda)$$

se obtienen los valores propios a partir de las raices del polinomio caracteristico

$$P(\lambda) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ c & a-\lambda & d \\ 0 & -\frac{bc}{d} & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 + bc\right] - bc(a-\lambda) = (a-\lambda)^3 = 0$$

$\lambda = a$, valor propio de A, con multipicidad 3.

se obtendran los vectores propios de la matriz A.

$$\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & d \\ 0 & -\frac{bc}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = 0 \qquad v_1 = -\frac{d}{c} v_3 \qquad \Rightarrow \vec{v} = v_3 \begin{bmatrix} -\frac{d}{c} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ c \end{bmatrix} e^{at}$$

Intento:

$$\vec{x}_2 = \vec{v}te^{at} + \vec{k}e^{at}$$

se debe obtener el vector k.

$$\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & d \\ 0 & -\frac{bc}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$$

$$k = -\frac{d}{b} \qquad k_1 = -\frac{d}{c}k_3 \quad \Rightarrow \vec{k} = k_3 \begin{bmatrix} -\frac{d}{c} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{d}{b} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \Rightarrow k_3 = 0$$

luego

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ c \end{bmatrix} te^{at} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{d}{b} \\ 0 \end{bmatrix} e^{at}$$

intento:

$$\vec{x}_3 = \vec{v}\frac{t^2}{2}e^{at} + \vec{k}te^{at} + \vec{p}e^{at}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & d \\ 0 & -\frac{bc}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{d}{b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = 0 \qquad p_1 = -\frac{d}{c}p_3 - \frac{d}{bc} \quad \Rightarrow \vec{p} = p_3 \begin{bmatrix} -\frac{d}{c} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{d}{bc} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \Rightarrow p_3 = 0$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

luego

$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} e^{at} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{d}{b} \\ 0 \end{bmatrix} te^{at} + \begin{bmatrix} -\frac{d}{bc} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{at}$$

finalmente la solución del sistema es:

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3$$

Ejercicio 5.2. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones, encontrando la matriz exponencial:*

$$x' = Ax,$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Solución:

En primer lugar se obtendran los valores y vectores propios de la matriz A

Valores propios:

$$\lambda_1 = a + b \qquad \lambda_2 = a - b \qquad \lambda_3 = a$$

Vectores propios correspondientes a cada valor propio:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Método 1: Valores y vectores propios generalizado

$$\vec{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(a+b)t} \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{(a-b)t} \qquad \vec{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{at}$$

luego

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} e^{(a+b)t} & 0 & e^{(a-b)t} \\ 0 & e^{at} & 0 \\ e^{(a+b)t} & 0 & -e^{(a-b)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \Phi(t)\vec{c}$$

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{(a+b)t} & 0 & e^{(a-b)t} \\ 0 & e^{at} & 0 \\ e^{(a+b)t} & 0 & -e^{(a-b)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

finalmente

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] \\ 0 & e^{at} & 0 \\ \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] \end{bmatrix}.$$

Método 2: Ocupando forma canónica de Jordan

$$D = \begin{bmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(a+b)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{at} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(a-b)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

finalmente

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] \\ 0 & e^{at} & 0 \\ \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] \end{bmatrix}.$$

Método 3: Despejando variables

(1) $\quad x' = ax + bz$

(2) $\quad y' = ay$

(3) $\quad z' = bx + az$

De (2) $y(t) = C_2 e^{at}$.

De (3) $x = \frac{z' - az}{b} \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{z'' - az'}{b}$,

En (1) $\Rightarrow$

$$z'' - 2az' + (a^2 - b^2)z = 0$$

El polinomio característico es $m^2 - 2am + (a^2 - b^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = a - b$ $m_2 = a + b \Rightarrow$

$$z(t) = c_1 e^{(a+b)t} + c_3 e^{(a-b)t}$$

$$x(t) = c_1 e^{(a+b)t} - c_3 e^{(a-b)t}$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(a+b)t} & 0 & -e^{(a-b)t} \\ 0 & e^{at} & 0 \\ e^{(a+b)t} & 0 & e^{(a-b)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

finalmente

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] \\ 0 & e^{at} & 0 \\ \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] \end{bmatrix}$$

Método 4: Serie

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

como $A = PDP^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^k = PD^kP^{-1}$

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a+b)^k & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[(a+b)^k + (a-b)^k\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[(a+b)^k - (a-b)^k\right] \\ 0 & a^k & 0 \\ \frac{1}{2}\left[(a+b)^k - (a-b)^k\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[(a+b)^k + (a-b)^k\right] \end{bmatrix}$$

$$\left(e^{At}\right)_{11} = \left(e^{At}\right)_{33} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+t)^k t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a-b)^k t^k}{k!}\right] = \frac{1}{2}e^{(a+b)t} + \frac{1}{2}e^{(a-b)t}$$

$$\left(e^{At}\right)_{13} = \left(e^{At}\right)_{31} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+t)^k t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a-b)^k t^k}{k!}\right] = \frac{1}{2}e^{(a+b)t} - \frac{1}{2}e^{(a-b)t}$$

$$\left(e^{At}\right)_{22} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+t)^k t^k}{k!} = e^{at}$$

finalmente

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] \\ 0 & e^{at} & 0 \\ \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] \end{bmatrix}$$

Método 5: Laplace

$$e^{At} = Ł^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} s-a & 0 & -b \\ 0 & s-a & 0 \\ -b & 0 & s-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(s-a)}{(s-a)^2-b^2} & 0 & \frac{b}{(s-a)^2-b^2} \\ 0 & \frac{1}{s-a} & 0 \\ \frac{b}{(s-a)^2-b^2} & 0 & \frac{(s-a)}{(s-a)^2-b^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aplicamos Laplace a $(sI - A)^{-1}$.

$$Ł^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}\right\} = e^{at}Ł^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - b^2}\right\} = \frac{e^{at}}{2}Ł^{-1}\left\{\frac{1}{s+b} + \frac{1}{s-b}\right\}$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}\right\} = \frac{1}{2}\left(e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right)$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}\right\} = e^{at}Ł^{-1}\left\{\frac{b}{s^2 - b^2}\right\} = \frac{e^{at}}{2}Ł^{-1}\left\{\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b}\right\}$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}\right\} = \frac{1}{2}\left(e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right)$$

finalmente

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] \\ 0 & e^{at} & 0 \\ \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] \end{bmatrix}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Ejercicio 5.3. *Considere la ecuación diferencial $x' = Ax$ donde*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

es una matriz real que satisface $\det(A) \neq 0$. *Vamos a suponer que el polinomio caracteristico de A tiene un solo valor propio λ_1 real con multiplicidad dos y que* $\dim\ker(A - \lambda_1 I) = 1$, *y que K es el vector propio. Sabemos que para formar la solución general hay que encontrar un vector propio generalizado P linealmente independiente de K.*

(a) *Demuestre que P se puede encontrar como solución de la ecuación*

$$(A - \lambda_1 I) = K$$

(b) *Demuestre que el representante Λ de A segun la base $\{K, P\}$ es*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

(c) *Defina κ=[K,P]. Evalue primero $\kappa^{-1}K$ y $\kappa^{-1}P$. Demuestre entonces que*

$$\Lambda = \kappa^{-1} A \kappa$$

(d) *Defina $x = \kappa y$ con $y = [y_1, y_2]^T$. Encuentre el sistema de ecuaciones diferenciales que satisface y (sistema canónico) y resuelva este sistema. Suponiendo que $\lambda_1 < 0$, ¿Que puede decir de la estabilidad del origen?*

Solución:

(a) $P \in \ker(A - \lambda_1 I)^2 \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_1 I)^2 P = 0, \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_1 I)P = 0.$

Sea $\Delta = (A - \lambda_1 I)P \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_1)\Delta = 0$, Δ es vector propio de A.

$\Rightarrow \quad \Delta = K \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_1 I)P = K$

(b) Base $\{K, P\}$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$\Rightarrow \quad AK = \lambda_1 K$

$\Rightarrow \quad AP = \lambda_1 P + K$

Entonces

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

(c) $\kappa = [K, P]$

$\Rightarrow \quad \kappa^{-1}\kappa = I$

$\Rightarrow$

$$\left[\kappa^{-1}K | \kappa^{-1}P\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\kappa^{-1}K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \kappa^{-1}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \kappa^{-1}A\kappa = \kappa^{-1}[AK \ AP] = \kappa^{-1}\left[\lambda_1 K | \lambda_1 P + K\right]$$

$$\Lambda = \left[\lambda_1 \kappa^{-1} k | \lambda_1 \kappa^{-1} P + \kappa^{-1} K\right] = \kappa^{-1} A \kappa$$

finalmente, como

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Lambda = \kappa^{-1} A \kappa$$

parte (d):

$x = \kappa y \quad \Rightarrow \quad y' = \Lambda y$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$\Rightarrow$

$y_1' = \lambda_1 y_1 + y_2$

$y_2' = \lambda_1 y_2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_2(0)e^{\lambda_1 t}$

$$y_1' - \lambda_1 y_1 = y_2(0)e^{\lambda_1 t}$$

$$\left(e^{-\lambda_1 t} y_1\right)' = y_2(0)$$

$\Rightarrow$

$$e^{-\lambda_1 t} y_1 = y_1(0) + t y_2(0)$$

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0) + t e^{\lambda_1 t} y_2(0)$$

luego las soluciones son:

$y_2 = y_2(0)e^{\lambda_1 t}$

$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0) + t e^{\lambda_1 t} y_2(0)$

si $\quad t \to \infty \quad \Rightarrow y_1 \to 0$ e $y_2 \to 0$

$\Rightarrow$ el sistema es estable.

Ejercicio 5.4. *Sea $\Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, una matriz real $n \times n$ de clase $\mathcal{C}^1$(derivada continua). Suponga que $\Phi(0) = I$ y que $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Demuestre primero que existe una matriz A talque $\Phi(t) = e^{At}$. Demuestre a continuación que esta matriz A es única.*

<u>Solución:</u>

Existencia

$\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s) \quad \Rightarrow \quad \Phi'(t+s) = \Phi'(t)\Phi(s)$

luego en $t = 0$

$\Phi(0) = I$

$\Phi'(s) = \Phi'(0)\Phi(s) \quad \forall s$

$\Rightarrow$

$$\Phi(t) = \Phi(0)e^{\Phi'(0)t} = e^{\Phi'(0)t}$$

observación:

$$\Phi(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(h) - I}{h}$$

observación: si $\Phi(t) = e^{At} \quad \Rightarrow \quad \Phi'(t) = A\Phi(t) \quad \forall t$

luego $\quad t = 0 \quad \Phi'(0) = A\Phi(0) = A$

Unicidad

Si tambien $\Phi(t) = e^{Bt} \quad \Rightarrow \quad \Phi'(t) = Be^{Bt} \quad \forall t$

Además $\quad \Phi'(t) = \Phi(0)e^{\Phi'(0)t} \quad \forall t$

luego en $t = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Phi'(0) = B = A$$

Ejercicio 5.5. *Responder las siguientes preguntas:*

(a) $x' = Ax$ *A matriz de 3×3 cuyos valores propios satisfacen que:* $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ *se satisface además que* $\dim[\ker(A - \lambda_1 I)] = 1$*, ¿Cual es la solución?*

(b) $x' = Ax$ *A matriz de 3×3 cuyos valores propios satisfacen que:* $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ *se satisface además que* $\dim[\ker(A - \lambda_1 I)] = 2$*, ¿Cual es la solución?*

(c) $x' = Ax$ *A matriz de 3×3 cuyos valores propios satisfacen que:* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ *se satisface además que* $\dim[\ker(A - \lambda_1 I)] = 2$*, ¿Cual es la solución?*

Solución:

(a) $x' = Ax \quad ; \quad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

$\dim[\ker(A - \lambda_1 I)] = 2$

$$\vec{X} = c_1\vec{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{K}_2 e^{\lambda_1 t} + c_3\vec{K}_3 e^{\lambda_3 t}$$

$\vec{K}_1$ y $\vec{K}_2$ vectores propios asociados a $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

$\vec{K}_3$ vectores propios asociados a

$\lambda = \lambda_3$

(b) $x' = Ax \quad ; \quad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

$\dim[\ker(A - \lambda_1 I)] = 1$

$$\vec{X} = c_1\vec{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\left(\vec{K}_1 e^{\lambda_1 t}\vec{P}_1 e^{\lambda_1 t}\right) + c_3\vec{K}_3 e^{\lambda_3 t}$$

$\vec{K}_1$ vector asociado a $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

$\left(A - \lambda_1 I\vec{P}_1\right) = \vec{K}_1$ $\vec{P}_1$ vector propio generalizado.

$\vec{K}_3$ vector propio asociado a $\lambda = \lambda_3$

(c) $x' = Ax \quad ; \quad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

$\dim[\ker(A - \lambda_1 I)] = 2$

$$\vec{X} = c_1\vec{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{K}_2 t e^{\lambda_1 t} c_3\left(\vec{K} e^{\lambda_1 t} + \vec{P} e^{\lambda_1 t}\right)$$

$\vec{K}_1$ y $\vec{K}_2$ vectores propios asociados a $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

$\vec{K} = \mu_1\vec{K}_1 + \mu_2\vec{K}_2$ combinación lineal de los vectores propios.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$(A-\lambda_1 I)\vec{P}=\vec{K} \quad \Rightarrow \quad$ ecuación que determina μ_1 en función de μ_2 y $\vec{P}$.

Ejercicio 5.6. *Considere el problema con condiciónes iniciales*

$$x' = Ax \quad ; \quad x(0)=x_0$$

donde A es una matriz de $n\times n$ de numeros reales. Vimos en clases que la solución de este problema es $x(t)=x_0 e^{At}$, donde e^{At} es la matriz exponencial de A. Recuerde que $e^{0A}=I$, donde I es la matriz identidad de $n\times n$.

(i) Demuestre que la matriz exponencial satisface la siguiente la propiedad de semigrupo:

$$e^{(t+s)A}=e^{At}e^{sA} \qquad \forall t,s\in\mathbb{R}$$

Demuestre de aqui que $\left(e^{At}\right)^{-1}=e^{-At}$

(ii) Sean A,B dos matrices reales de $n\times n$. Demuestre que

$$Be^{At}=e^{At}B \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

si y solo si $AB=BA$.

(iii) Demuestre que

$$e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt} \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

si y solo si $AB=BA$.

Solución:

parte (i):

por demostrar que $\quad e^{(t+s)A}=e^{tA}e^{sA} \quad \forall t,s\in\mathbb{R}$

Sean $\quad u(t)=e^{(t+s)A}c \quad ; \quad v(t)=e^{tA}e^{sA}c$

$\Rightarrow$

$u'(t)=Ae^{(t+s)A}c=Au(t) \quad \Rightarrow \quad u(0)=e^{st}c$

$v'(t)=Ae^{tA}e^{sA}c=Av(t) \quad \Rightarrow \quad v(0)=e^{sA}c$

luego por teorema de existencia y unicidad $\quad \Rightarrow u(t)=v(t) \quad \forall t$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\Rightarrow \quad \left[e^{tA}e^{sA} - e^{(t+s)A}\right] c = 0 \quad \forall t \quad \forall c$$

luego

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$$

por demostrar que $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$

sea $s = -t \quad \Rightarrow$

$$e^{(t-t)A} = e^{tA}e^{-tA}$$

$\Leftrightarrow$

$$I = e^{tA}e^{-tA} = e^{-tA}e^{tA}$$

luego multiplicando por el inverso de (e^{tA}) que equivale a $\left(e^{tA}\right)^{-1}$

$\Rightarrow$

$$\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA} I$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$$

parte (ii):

Por demostrar que

$$Be^{At} = e^{At}B \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA$$

$(\Leftarrow)$

sea $BA = AB$

Sean $\quad u(t) = e^{tA}Bc \quad ; \quad v(t) = Be^{tA}c$

$\Rightarrow$

$u'(t) = Ae^{tA}Bc = Au(t) \quad \Rightarrow \quad u(0) = ABc$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$v'(t) = BAe^{tA}c = ABe^{tA}c = Av(t) \quad \Rightarrow \quad v(0) = ABc$

luego por teorema de existencia y unicidad $\quad \Rightarrow u(t) = v(t) \quad \forall t$

$\Rightarrow \quad \left[e^{tA}B - Be^{tA}\right] c = 0 \quad \forall t \quad \forall c$

luego

$$e^{tA}B = Be^{tA}$$

$(\Rightarrow)$

sea $e^{tA}B = Be^{tA}$

$\Rightarrow$

$$Ae^{tA}Bc = BAe^{tA}c$$

evaluando en $t = 0$
$\Rightarrow$

$$[AB - BA]\, c = 0 \quad \forall c$$

$\Rightarrow$

$$AB = BA$$

parte (iii):

Por demostrar que

$$e^{t(A+B)} = e^{At}e^{Bt} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA$$

$(\Leftarrow)$

sea $BA = AB$

Sean $\quad u(t) = e^{t(A+B)}c \quad ; \quad v(t) = e^{tA}e^{tB}c$

$\Rightarrow$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$u'(t) = (A+B)e^{t(A+B)}c = (A+B)u(t) \quad \Rightarrow \quad u(0) = c$

$v'(t) = Ae^{tA}e^{tB}c + e^{tA}Be^{tB}c$

$\Leftrightarrow$

$v'(t) = Ae^{tA}e^{tB}c + Be^{tA}e^{tB}c = (A+B)v(t) \quad \Rightarrow \quad v(0) = c$

luego por teorema de existencia y unicidad $\quad \Rightarrow u(t) = v(t) \quad \forall t$

$\Rightarrow$

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$$

$(\Rightarrow)$

$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$

$\Rightarrow$

$$(A+B)e^{t(A+B)} = Ae^{tA}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt}$$

$\Rightarrow$

$$(A+B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{Bt} = e^{At}Be^{Bt}$$

$$e^{tA}Be^{tB} = Be^{tA}e^{tB}$$

multiplicando por e^{-tB}

$$e^{tA}BI = Be^{tA}I$$

$$e^{tA}B = Be^{tA}$$

luego por parte (ii)

$$AB = BA$$

Ejercicio 5.7. *Considere el sistema de ecuaciones*

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$x_1' = 2x_1 - 3x_2 \quad ; \quad x_2' = -3x_1 + 2x_2$$

(a) Encuentre la solución de este sistema por medio de la matriz exponencial de la matriz correspondiente.

(b) Reduzca el sistema a su forma canónica (en las coordenadas (y_1, y_2)). Encuentre los puntos críticos y clasifiquelos.

Solución:

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} x$$

parte (a):

valores propios

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \quad ; \quad \lambda_2 = 5$$

vector propio asociado a λ_1

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

vector propio asociado a λ_2

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$\Rightarrow$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ e^{5t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\vec{X} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\vec{x}(0)$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} -e^{5t} & e^{-t} \\ e^{5t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\vec{X} = e^{At}\vec{x}(0)$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \frac{e^{5t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{-t}-e^{5t}}{2} \\ \frac{e^{-t}-e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t}+e^{-t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

parte (b):

$$X = KY = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y$$

$\Rightarrow \quad \dot{Y} = DY \quad \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Puntos criticos: $\dot{X} = AX = 0$ $\quad A$ es invertible $\Rightarrow$ $\quad X = (0,0)^T$ es el único punto critico.

$\dot{y}_1 = 5y_1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = C_1 e^{5t}$

$\dot{y}_2 = -1y_1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = C_2 e^{-t}$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

El punto encontrado es un punto silla.

Ejercicio 5.8. *(a) Sea* $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ *con* I_n *la matriz identidad de* $n \times n$.

Demuestre que se cumple:

$$\cosh(t) I_{2n} = \frac{e^{At} + e^{-At}}{2}$$

$$\sinh(t) A = \frac{e^{At} - e^{-At}}{2}$$

(b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ *con* I_n *la matriz identidad de* $n \times n$.

Demuestre que se cumple:

$$\cos(t) I_{2n} = \frac{e^{At} + e^{-At}}{2}$$

$$\sin(t) A = \frac{e^{At} - e^{-At}}{2}$$

Solución:

(a) Sea $A^0 = I_{2n}$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = A$$

luego $\quad A^{2n} = I_{2n} \quad ; \quad A^{2n+1} = A \qquad n = \{0, \ldots, \infty\}$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{At} = I_{2n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} + A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

se sabe que $\cosh(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, $\sinh(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, luego

$$e^{At} = I_{2n} \cosh(t) + A \sinh(t) \tag{5.37}$$

$$e^{-At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} A^{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1} A^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{-At} = I_{2n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} - A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{-At} = I_{2n} \cosh(t) - A \sinh(t) \tag{5.38}$$

luego sumando las igualdades (5.37) y (5.38) $\Rightarrow$

$$\cosh(t) I_{2n} = \frac{e^{At} + e^{-At}}{2}$$

restando las igualdades, (5.37) menos (5.38) $\Rightarrow$

$$\sinh(t) A = \frac{e^{At} - e^{-At}}{2}$$

parte (b):

Sea $A^0 = I_{2n}$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = A \quad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = -A \quad \Rightarrow \quad A^4 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = A \quad \Rightarrow \quad A^6 = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$$

luego $A^{2n} = (-1)^n I_{2n} \quad ; \quad A^{2n+1} = (-1)^n A \quad n = \{0, \ldots, \infty\}$

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n I_{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{At} = I_{2n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

se sabe que

$\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$

$\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

luego

$$e^{At} = I_{2n} \cos(t) + A \sin(t) \tag{5.39}$$

$$e^{-At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} A^{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1} A^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$e^{-At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}t^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1}t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{-At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_{2n}(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{-At} = I_{2n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} - A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{At} = I_{2n}\cos(t) - A\sin(t) \tag{5.40}$$

luego sumando las igualdades (5.39) y (5.40) $\Rightarrow$

$$\cos(t) I_{2n} = \frac{e^{At} + e^{-At}}{2}$$

restando las igualdades, (5.39) menos (5.40) $\Rightarrow$

$$\sin(t) A = \frac{e^{At} - e^{-At}}{2}$$

Ejercicio 5.9. *(a) Calcule la matriz exponencial e^{tN_4}, donde la matriz N_4 está dada por:*

$$N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Resuelva mediante la matriz exponencial e^{tA} la ecuación:

$$x' = Ax,$$

donde la matriz A es de $n \times n$ y está dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & 0 \\ 0 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

con a y b números reales no nulos.

Solución:

Se debe mostrar que $N_4^4 = 0$. Entonces se aplica la definición de matriz exponencial:

$$e^{tN_4} = \sum_{k=0}^{3} \frac{t^k}{k!} N_4^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $A = aI_n + bN_n$, con I_n identidad de $n \times n$ y N_n tal que $[N_n]_{i,i+1} = 1$ con $i = 1, ..., n-1$, y cero en el resto de la matriz.

Las matrices aI_n y bN_n conmutan, y entonces $e^{tA} = e^{taI_n} e^{tbN_n}$.

$$e^{taI_n} = e^{at} I_n.$$

N_n es triangular superior, y cumple que $N_n^n = 0_n$. Entonces utilizando la definición por series:

$$e^{tbN_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(tb)^k}{k!} N_n^k = \begin{pmatrix} 1 & bt & \frac{(bt)^2}{2!} & \dots & \frac{(bt)^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & bt & \dots & \frac{(bt)^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{(bt)^{n-3}}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente:

$$e^{tA} = e^{taI_n} e^{tbN_n} = \begin{pmatrix} e^{at} & bte^{at} & \frac{(bt)^2 e^{at}}{2!} & \dots & \frac{(bt)^{n-1} e^{at}}{(n-1)!} \\ 0 & e^{at} & bte^{at} & \dots & \frac{(bt)^{n-2} e^{at}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & e^{at} & \dots & \frac{(bt)^{n-3} e^{at}}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & e^{at} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5.10. *Encuentre la base de soluciones y la matriz exponencial del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' &= 2x_1 + x_3 \\ x_3' &= x_1 - x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

Solución:

La matriz A tiene el valor propio 1 con multiplicidad 1 asociado al vector propio $[0,1,1]^T$. Entonces $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix}$.

La matriz A tiene el valor propio 2 con multiplicidad 2 asociado al vector propio $K = [1,1,0]^T$. Entonces $x^{(2)} = Ke^{2t} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Se calcula el vector propio generalizado P, usando $(A-2I)P = K$, de donde se obtiene $P = [0,0,1]^T$. Entonces $x^{(3)} = Kte^{2t} + Pe^{2t} = \begin{bmatrix} te^{2t} \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$.

Con lo cual se tiene la base de soluciones. Para el calculo de la matriz exponencial, se genera la fundamental:

$$\Phi(t) = [x^{(2)}x^{(1)}x^{(3)}] = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & te^{2t} \\ e^{2t} & e^t & te^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

$$e^{tA} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t}(t+1) & -te^{2t} & te^{2t} \\ e^{2t}(t+1) - e^t & e^t - te^{2t} & te^{2t} \\ e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5.11. *Sea A una matriz de $n \times n$ con valores propios $\lambda_1, \ldots \lambda_s$ distintos, con multiplicidad $m_1, \ldots, m_s$ respectivamente, donde $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$.*

(a) Sea $c \in \mathbb{R}^n$ cualquiera. Justifique que se tiene:

$$e^{tA}c = \sum_{i=1}^{s} e^{t\lambda_i} e^{t(A-\lambda_i I)} c_i$$

donde $c = c_1 + \ldots + c_s$ es la descomposición de c según los espacios propios generalizados.

(b) A partir de (a) pruebe que:

$$|e^{tA}c| \leq \sum_{i=1}^{s} e^{\alpha_i t}|P_i(t)|$$

donde $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i \quad i = 1, \ldots, s$, $j = \sqrt{-1}$. $P_i(t)$ *es un polinomio con grado a lo más* m_i.

(c) Demuestre que si $\alpha_i < 0, \quad \forall i = 1, \ldots, s$ *entonces toda solución del sistema* $x' = Ax$ *es tal que:*

$$|x(t)| \to 0 \quad si \quad t \to \infty.$$

<u>Solución:</u>

(a) Como en clases, $A = A - \lambda_i I + \lambda_i I$. $A - \lambda_i I$ conmuta con $\lambda_i I$.
Se tiene entonces que

$$e^{At}c = \sum_{i=1}^{s} e^{At}c_i = \sum_{i=1}^{s} e^{(A-\lambda_i I+\lambda_i I)t}c_i = \sum_{i=1}^{s} e^{(A-\lambda_i I)t}e^{\lambda_i It}c_i$$

Sabiendo que $e^{\lambda_i It} = e^{\lambda_i t}I$ se concluye lo pedido.

(b) De la parte (a):

$$e^{tA}c = \sum_{i=1}^{s} e^{t\lambda_i}e^{t(A-\lambda_i I)}c_i.$$

Ocupando desigualdad triangular:

$$|e^{tA}c| \leq \sum_{i=1}^{s} |e^{t\lambda_i}||e^{t(A-\lambda_i I)}c_i|.$$

Como $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$, entonces $|e^{t\lambda_i}| = |e^{t\alpha_i}||e^{t\beta_i}| = e^{t\alpha_i}$.

Además $(A - \lambda_i I)$ se anula a lo más en el grado m_i. Entonces

$$|e^{t(A-\lambda_i I)}c_i| = |\sum_{k=1}^{m_i} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_i I)^k c_i| \leq \sum_{k=1}^{m_i} \frac{t^k}{k!}|(A - \lambda_i I)^k c_i| = |P_i(t)|.$$

Noten que $(A - \lambda_i I)^k c_i$ es un vector, y su norma un real, entonces el término de la derecha es un polinomio $P_i(t)$.
Luego:

$$|e^{tA}c| \leq \sum_{i=1}^{s} e^{t\alpha_i}|P_i(t)|.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

(c)

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)| = \lim_{t\to\infty}|e^{tA}c| \leq \lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{s} e^{t\alpha_i}|P_i(t)| = \sum_{i=1}^{s}\lim_{t\to\infty} e^{t\alpha_i}|P_i(t)|$$

Por hipótesis $\alpha_i < 0$, entonces $\lim_{t\to\infty} e^{t\alpha_i}|P_i(t)| = 0$ pues la exponencial decae más rápido a cero que cualquier polinomio. Entonces

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)| = 0$$

Ejercicio 5.12. *Sea A una matriz real de 6×6 que tiene un valor propio complejo $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, con multiplicidad 3. Suponiendo que $dim\,(Ker(A-\lambda I)) = 1$, y haciendo un análisis como en clases, encontrar las distintas bases de soluciones de la ecuación*

$$x' = Ax$$

correspondientes a las diferentes situaciones que puedan originarse.

Solución:

Sea K_1^i el vector propio complejo asociado a $\alpha + i\beta$. Entonces dos soluciones l.i. son:

$$x^{(1)}(t) = Re\{K_1^i e^{(\alpha+i\beta)t}\}, \quad x^{(2)}(t) = Im\{K_1^i e^{(\alpha+i\beta)t}\}$$

Faltan cuatro soluciones. Se calcula el vector propio generalizado P con la ecuación $(A-(\alpha+i\beta)\mathrm{I})\mathrm{P} = \mathrm{K}_1^{\mathrm{i}}$. Se presentan dos casos:

Caso 1: Si $dim\,(Ker(A-\lambda I)^2) = 2$, o sea dos vectores P asociados. Entonces, sean P_1^i y P_2^i los vectores generalizados complejos.

Las soluciones que faltan para completar la base son:

$$x^{(3)}(t) = Re\{K_1^i te^{(\alpha+i\beta)t} + P_1^i e^{(\alpha+i\beta)t}\}, \quad x^{(4)}(t) = Im\{K_1^i te^{(\alpha+i\beta)t} + P_1^i e^{(\alpha+i\beta)t}\}$$

$$x^{(5)}(t) = Re\{K_1^i te^{(\alpha+i\beta)t} + P_2^i e^{(\alpha+i\beta)t}\}, \quad x^{(6)}(t) = Im\{K_1^i te^{(\alpha+i\beta)t} + P_2^i e^{(\alpha+i\beta)t}\}$$

Caso 2: Si $dim\,(Ker(A-\lambda I)^2) = 1$, o sea un vector generalizado complejo P_1^i asociado. Entonces con este vector se generan dos soluciones mas:

$$x^{(3)}(t) = Re\{K_1^i te^{(\alpha+i\beta)t} + P_1^i e^{(\alpha+i\beta)t}\}, \quad x^{(4)}(t) = Im\{K_1^i te^{(\alpha+i\beta)t} + P_1^i e^{(\alpha+i\beta)t}\}$$

Las otras dos soluciones que faltan se obtienen calculando el vector propio generalizado Q_1^i, resolviendo:

$$(A-(\alpha+i\beta)\mathrm{I})\mathrm{Q}_1^{\mathrm{i}} = \mathrm{P}_1^{\mathrm{i}}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

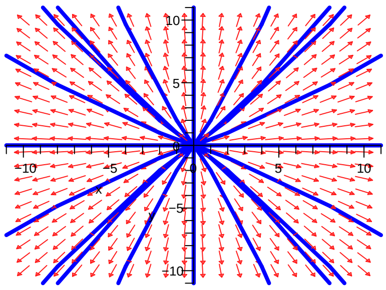

FIGURA 11. Diagrama de fase sistema linealizado, punto crítico (0,0)

y las soluciones que aporta son:

$$x^{(5)}(t) = Re\{K_1^i \frac{t^2}{2} e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{t}} + P_1^i t e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{t}} + Q_1^i e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{t}}\},$$

$$x^{(6)}(t) = Im\{K_1^i \frac{t^2}{2} e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{t}} + P_1^i t e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{t}} + Q_1^i e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{t}}\}$$

Ejercicio 5.13. *Para el sistema plano*

$$x' = A(a,b)x, \quad A(a,b) = \begin{pmatrix} 14-4a-b & -a \\ -b & 16-4b-a \end{pmatrix},$$

se pide determinar la naturaleza del punto crítico, y el diagrama de fases asociado al sistema linealizado cuando (a,b) *toma los valores* $(0,0)$, $(0,8)$, $(7,0)$ *y* $(4,6)$.

Caso 1: (0,0).

El sistema linealizado es:

$$x' = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} x.$$

Sus vectores propios son $\lambda_1 = 14 > 0$ y $\lambda_2 = 16 > 0$. Por lo tanto $(0,0)$ es un NODO INESTABLE. El diagrama de fase se muestra en la Figura 11.

Caso 2: (0,8).

El sistema linealizado es:

$$x' = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -8 & -16 \end{pmatrix} x.$$

Sus vectores propios son $\lambda_1 = 6 > 0$ y $\lambda_2 = -16 > 0$. Por lo tanto $(0,8)$ es un PUNTO SILLA. El sistema linealizado no está en forma canónica. Los vectores propios son: $[-11, 4]$ y $[0, 1]$. El diagrama de fase se muestra en la Figura 12.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

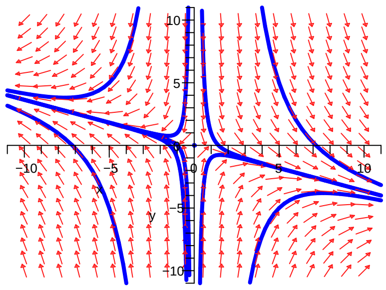

FIGURA 12. Diagrama de fase sistema linealizado, punto crítico (0,8)

Caso 3: (7,0).

El sistema linealizado es:

$$x' = \begin{pmatrix} -14 & -7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} x.$$

Sus vectores propios son $\lambda_1 = -14 > 0$ y $\lambda_2 = 9 > 0$. Por lo tanto $(0,8)$ es un PUNTO SILLA. El sistema linealizado no está en forma canónica. Los vectores propios son: $[1,0]$ y $[7,-23]$. El diagrama de fase se muestra en la Figura 13.

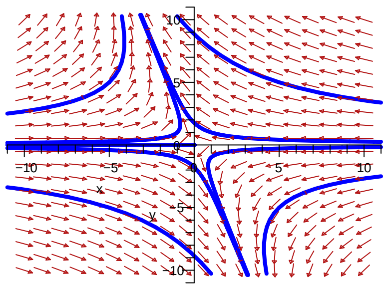

FIGURA 13. Diagrama de fase sistema linealizado, punto crítico (7,0)

Caso 4: (4,6).

El sistema linealizado es:

$$x' = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} x.$$

Sus vectores propios son $\lambda_1 = -10 + 2\sqrt{7} < 0$ y $\lambda_2 = -10 - 2\sqrt{7} < 0$. Por lo tanto $(4,6)$ es un NODO ESTABLE. El sistema linealizado no está en forma canónica. Los vectores propios son: $[2, 1-\sqrt{7}]$ y $[2, 1+\sqrt{7}]$. El diagrama de fase se muestra en la Figura 14.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

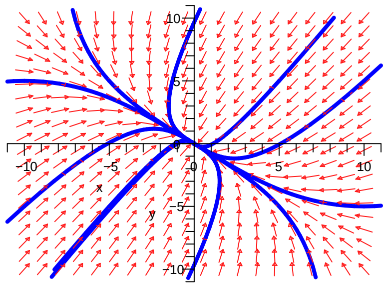

FIGURA 14. Diagrama de fase sistema linealizado, punto crítico (4,6)

6. Resolucion de EDO por series de potencias

6.1. Breve repaso de series de potencias. Recordemos que una serie de potencias en torno $a \in \mathbb{R}$ es una expresión de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{6.1}$$

donde los coeficientes c_n son reales y $x \in \mathbb{R}$.

Decimos que la serie converge en $x \in \mathbb{R}$ si la sucesión $\{S_j(x)\}$ es convergente, donde

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^{j} c_n (x-a)^n,$$

si esta sucesión no converge decimos que la serie es divergente en x.

Decimos que la serie (6.1) converge absolutamente en $x \in \mathbb{R}$ si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||(x-a)|^n$$

es convergente.

Ejercicio. Usando la desigualdad

$$|\sum_{n=j}^{k} c_n (x-a)^n| \leq \sum_{n=j}^{k} |c_n||(x-a)|^n$$

demuestre que si la serie (6.1) converge absolutamente entonces es convergente.

Un número R tal que la serie (6.1) converge para todo x tal que $|x-a| < R$ y diverge para todo x tal que $|x-a| > R$ se llama el radio de convergencia de la

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

serie. El intervalo $(-R+a, a+R)$ se llama el intervalo de convergencia de la serie. Recordemos que R puede ser 0, positivo o infinito. Si $R > 0$ se tiene que la serie puede o no converger para $x = a + R$, $x = a - R$.

Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 6.1. *Si el radio de convergencia de la serie de potencias (6.1) es R entonces la serie converge absolutamente para todo x tal que $|x-a| < R$ y divergente para todo x tal que $|x - a| > R$.*

Usemos el criterio del cuociente para estudiar el radio de convergencia de la serie (6.1). Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_n + 1} \right| = R, \tag{6.2}$$

existe. Para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}||x-a| = \frac{|x-a|}{R}.$$

Entonces el criterio del cuociente nos dice que la serie (6.1) converge absolutamente para todo x tal que $\frac{|x-a|}{R} < 1$ y es divergente para todo x tal que $\frac{|x-a|}{R} > 1$. De aquí que el radio de de convergencia de la serie es exactamente R. Esto es cierto si el límite (6.2) existe. Si no, hay que usar otros criterios (repasar).

Supongamos que la serie (6.1) es convergente con un radio de convergencia $R > 0$. Entonces ella define una función en su intervalo de convergencia

$$x \in (-R+a, R+a) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = f(x)$$

(los extremos del intervalo de convergencia pueden estar incluidos). Las siguientes propiedades son conocidas.

En $(-R + a, R + a)$, f es contínua, diferenciable e integrable y se tiene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(x-a)^{n-1},$$

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

ambas series con el mismo radio de convergencia. Notemos sin embargo que al diferenciar se pueden perder los extremos del intervalo como puntos de convergencia, similarmente al integrar se pueden ganar estos puntos.

Las series de potencias se pueden multiplicar por una constante sin cambiar su intervalo de convergencia.

Dos series se pueden sumar en su intervalo común de convergencia resultando una serie convergente en ese intervalo. Esto es si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n$$

son dos series con radios de convergencia R_f y R_g respectivamente entonces

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n)(x-a)^n \end{aligned}$$

es una serie convergente en ese intervalo común de convergencia.

Repase multiplicación y división de series de potencias.

Definición 6.1. Decimos que una función f es analítica en un punto a de su dominio sí puede ser representada por una serie de potencia de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

la cual tiene un radio de convergencia positivo.

Ejemplo. Partiendo de $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, que sabemos converge para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos escribir

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$e^{x-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!},$$

y por lo tanto

$$e^{x} = e^{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!},$$

que converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Se tiene entonces que la función e^x es analítica para cada $a \in R$.

Vamos a ver ahora una propiedad que usaremos frecuentemente más tarde. Consideremos la serie (6.1) que suponemos convergente con un radio de convergencia $R > 0$ y diferenciemos esta serie para obtener la serie

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x-a)^{n-1}.$$

Como esta serie tiene el mismo intervalo de convergencia que la anterior, podemos derivarla nuevamente dando como resultado

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)(x-a)^{n-2},$$

que converge en el mismo intervalo de convergencia. Continuando de esta forma, para $k \in \mathbb{N}$ se obtiene

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k},$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}.$$

Esta serie converge absolutamente para $|x-a| < R$. Poniendo $x = a$ se obtiene

$$f^{(k)}(a) = k! c_k. \tag{6.3}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Teorema 6.2 (Unicidad de series)**.** *Si las series* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$ *convergen a la misma función* f *en un intervalo* $(-a+r, a+r)$*,* $r>0$*, entonces se tiene que*

$$c_n = d_n \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración 21. *De (6.3) se tiene*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = d_n,$$

que termina la demostración ■

Este teorema lo vamos a aplicar comunmente así.

Corolario 2. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = 0$*, para todo* x *tal que* $|x-a|<r$*,* $r>0$*, entonces* $c_n = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

6.2. Aplicaciones a ecuaciones diferenciales. Consideremos la ecuación diferencial.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{6.4}$$

donde suponemos que $a_i : I \mapsto \mathbb{R}$, $i = 0,1,2$ son funciones continuas en un intervalo I donde se satisface que $a_2(x) \neq 0$. Dividiendo la ecuación por a_2 se obtiene

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{6.5}$$

con

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \qquad Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}.$$

Definición.- Un punto $x_0 \in I$ se dice un punto ordinario de (6.5) si P y Q son analíticas en x_0. Si esto no sucede entonces decimos que x_0 es un punto singular.

Como P y Q son continuas en I de la teoría que hemos visto se tiene que en ese intervalo existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial. Sin embargo ninguno de los métodos que hemos visto nos ayuda a encontrar estas soluciones. Vamos a desarrollar aquí un método usando series. Consideremos primero unos ejemplos.

Ejemplo. Considere la ecuación

$$y'' + e^x y' + \sin(x)y = 0.$$

Sabemos que e^x y $\sin(x)$ x son analíticas para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, por lo que todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto ordinario de esta ecuación.

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$(x^2 - 1)y'' + 2x\ y' + 6y = 0$$

que escribimos en la forma (6.5) con

$$P(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \qquad Q(x) = \frac{6}{x^2 - 1}$$

Se tiene que P y Q son analíticas para todo $x \neq \pm 1$, los puntos $x = 1$ y $x = -1$ son puntos singulares de la ecuación.

Para explicar el método que vamos a usar consideremos un caso simple.

Ejemplo. Considere la ecuación

$$y'' - 2xy = 0.$$

Entonces $P(x) = 0$ y $Q(x) = -2x$. Es claro entonces que estas funciones son analíticas en 0. Para encontrar la base de soluciones vamos a suponer que la solución y tiene la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

con un radio de convergencia positivo. Derivando

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial, se obtiene

$$y''(x) - 2xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0,$$

que queremos escribir en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = 0,$$

en un cierto intervalo centrado en 0. Para esto hacemos lo siguiente, en la serie $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$ hacemos el cambio de variable $n = j+2$, equivalentemente $j = n-2$. Nos queda

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)c_{j+2} x^j.$$

Haciendo también el cambio de variables $n = j-1$ o $j = n+1$ en la otra serie, nos queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \quad = \quad \sum_{j=1}^{\infty} c_{j-1} x^j$$

Entonces la ecuación diferencial nos queda como

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)c_{j+2}\; x^j - 2\sum_{j=1}^{\infty} c_{j-1} x^j = 0$$

que se puede escribir como

$$1 \cdot 2 \cdot c_2 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[(j+1)(j+2)c_{j+2} - 2c_{j-1}\right] x^j = 0.$$

De aquí $c_2 = 0$ y por el corolario del teorema de unicidad de series

$$(j+1)(j+2)c_{j+2} - 2c_{j-1} = 0,$$

de donde

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$c_{j+2} = \frac{2}{(j+1)(j+2)} c_{j-1}. \tag{6.6}$$

Dando valores a j resulta

$$j = 1, \qquad c_3 = \frac{2}{2 \cdot 3} c_0.$$

$$j = 2, \qquad c_4 = \frac{2}{3 \cdot 4} c_1.$$

$$j = 3, \qquad c_5 = \frac{2}{4 \cdot 5} c_2 = 0.$$

$$j = 4, \qquad c_6 = \frac{2}{5 \cdot 6} c_3 = \frac{2}{5 \cdot 6} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} c_0 = \frac{2^2}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} c_0$$

$$j = 5, \qquad c_7 = \frac{2}{6 \cdot 7} c_4 = \frac{2^2}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} c_1.$$

Escribiendo los primeros términos de la serie se tiene

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + \cdots$$

que se puede escribir agrupar como

$$y(x) = c_0 \left(1 + \frac{2}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{2^2}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \cdots \right)$$

$$+ c_1 \left(x + \frac{2}{3 \cdot 4} x^4 + \frac{2^2}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \cdots \right).$$

Ejercicio.- Demuestre por inducción que se tiene:

$$y(x) = c_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left[\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 .... (3k-2)}{(3k)!} \right] x^{3k} \right]$$

$$+ c_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left[\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 ... (3k-1)}{(3k+1)!} \right] x^{3k+1} \right]$$

Llamemos

$$y_1(x) = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left[\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots .(3k-2)}{(3k)!}\right] x^{3k}\right]$$

y

$$y_2(x) = \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left[\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3k-1)}{(3k+1)!}\right] x^{3k+1}\right].$$

Es fácil ver que estas series convergen para todo $x \in \mathbb{R}$. Además las funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ ya que calculando el Wronskiano de estas funciones en $x = 0$, se tiene

$$W(y_1, y_2)(0) = y_1(0)y_2'(0) - y_2(0)y_1'(0) = 1.$$

Finalmente revisemos que el término general de y_1 es

$$a_k = 2^k \left[\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots .(3k-2)}{(3k)!}\right].$$

Por inducción, para $k = 1$ se tiene que $a_1 = 2\frac{1}{3!} = \frac{2}{2 \cdot 3}$, que es correcto. Lo suponemos cierto para k y queremos probarlo para $k+1$. Tenemos que obtener

$$a_{k+1} = 2^{k+1} \left[\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots .(3k-2)(3k+1)}{(3(k+1))!}\right].$$

Observamos que el término $a_{k+1} = c_{3k+3}$ corresponde a $j = 3k+1$ en la fórmula (6.6), ya que se debe tener $j + 2 = 3k + 3$. De esta fórmula se tiene entonces que

$$a_{k+1} = c_{3k+3} = \frac{2}{(3k+2)(3k+3)} c_{3k} = \frac{2}{(3k+2)(3k+3)} a_k$$

$$= 2^{k+1} \left[\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots .(3k-2)}{(3k)!(3k+2)(3k+3)}\right] = 2^{k+1} \left[\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots .(3k-2)(3k+1)}{(3k)!(3k+1)(3k+2)(3k+3)}\right] = a_{k+1}.$$

Verificar el término general de y_2 se deja de ejercicio.

A continuación revisemos directamente que y_1 es solución de la ecuación diferencial. Se tiene

$$y_1''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left[\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots .(3k-2)}{(3k-2)!}\right] x^{3k-2}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

y

$$2xy_1(x) = 2\left[x + \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \left[\frac{1\cdot 4\cdot 7....(3j-2)}{(3j)!}\right] x^{3j+1}\right]$$

donde hemos reemplazado el índice mudo k por j. Haciendo el cambio de variable $j = k-1$ en esta ultima ecuación nos queda

$$2xy_1(x) = 2\left(x + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-1} \left[\frac{1\cdot 4\cdot 7....(3k-5)}{(3k-3)!}\right] x^{3k-2}\right)$$

$$= 2\left(x + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-1} \left[\frac{1\cdot 4\cdot 7....(3k-5)(3k-2)}{(3k-3)!(3k-2)}\right] x^{3k-2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k} \left[\frac{1\cdot 4\cdot 7....(3k-2)}{(3k-2)!}\right] x^{3k-2},$$

por lo que se tiene que y_1 satisface

$$y_1'' - 2xy_1 = 0.$$

Notemos finalmente que y_1 es la solución que satisface $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$. Similarmente y_2 es la solución que satisface $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$.

Volvamos a la ecuación (6.4)

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

que la escribimos como en (6.5), esto es,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

donde

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \qquad Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}.$$

Suponemos que x_0 es un punto ordinario de la ecuación, se tiene el siguiente:

Teorema 6.3. *Sea x_0 un punto ordinario de la ecuación (6.5) y sean a_0, a_1 dos constantes arbitrarias. Entonces existe una única función $y(x)$ que es analítica en x_0, que es solución de la ecuación en un entorno de x_0, y que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = a_0$, $y'(x_0) = a_1$. Además si P y Q tienen desarrollo* *en series en torno a x_0 convergentes en el intervalo $|x - x_0| < R$ entonces la solución $y(x)$ tiene la misma propiedad.*

Demostración 22. Por conveniencia ponemos $x_0 = 0$. Así por hipótesis P y Q son analíticas en 0. En consecuencia se tiene que los podemos desarrollar en serie convergentes para $|x| < R$. Se tiene

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n. \tag{6.7}$$

Entonces intentamos encontrar una solución en serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Derivando se obtiene

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

las cuales las podemos escribir como

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Usando el producto de series, se obtiene

$$P(x)y'(x) = [\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n][\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n] = \sum_{n=0}^{\infty} [\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(k+1) a_{k+1}] x^n \tag{6.8}$$

y

$$Q(x)y(x) = [\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n][\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n] = \sum_{n=0}^{\infty} [\sum_{k=0}^{n} q_{n-k} a_k] x^n. \tag{6.9}$$

Substituyendo las expresiones para y'', (6.8) y (6.9) en la ecuación diferencial se obtiene

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_{n+2}+\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}(k+1)a_{k+1}+\sum_{k=0}^{n}q_{n-k}a_k]x^n=0,$$

que por el corolario del teorema de unicidad de series nos da la siguiente ley de recurrencia para los coeficientes.

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}=-\sum_{k=0}^{n}[(k+1)p_{n-k}a_{k+1}+q_{n-k}a_k]. \tag{6.10}$$

Sea $0<r<R$. Como las series en (6.7) son convergentes para $x=r$, los términos generales en ellas deben tender a cero. Así existe una constante $M>0$ tal que

$$|p_n|r^n\le M \qquad |q_n|r^n\le M,$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Usando estas acotaciones en (6.10), tenemos

$$(n+1)(n+2)|a_{n+2}|\le\frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|]r^k$$

$$\le\frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|]r^k+M|a_{n+1}|r.$$

Pongamos $b_0=|a_0|$, $b_1=|a_1|$, y b_{n+2}, $n\ge 0$, por

$$(n+1)(n+2)b_{n+2}=\frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k+Mb_{n+1}r. \tag{6.11}$$

Entonces $0\le|a_n|\le b_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$, propiedad que vamos a usar para establecer la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ por medio del criterio de comparación de series. Para esto tenemos que estudiar primero la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$. Esto lo haremos estudiando el cuociente b_{n+1}/b_n. Substituyendo n por $n-1$ y por $n-2$ en (6.11), se obtiene las siguientes ecuaciones.

$$n(n+1)b_{n+1}=\frac{M}{r^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k+Mb_nr. \tag{6.12}$$

y

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$(n-1)nb_n = \frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k + Mb_{n-1}r. \tag{6.13}$$

Multiplicando (6.12) por r y usando (6.13), se obtiene

$$rn(n+1)b_{n+1} = \frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k + Mb_nr^2$$

$$= (n-1)nb_n - Mb_{n-1}r + rM(nb_n + b_{n-1}) + Mb_nr^2 = [(n-1)n + rMn + Mr^2]b_n,$$

de donde

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n-1)n + rMn + Mr^2}{rn(n+1)} \to \frac{1}{r} \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

lo que nos dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para todo $|x| < r$. Pero entonces como $0 \leq |a_n| \leq b_n$ el criterio de comparación de series nos dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge (absolutamente) para $|x| < r$. Finalmente como r es cualquier número menor que R se tiene que la serie converge para $|x| < R$ ■

Un ejemplo del uso de este teorema ya fue visto anteriormente. Vamos a aplicar ahora este teorema a la ecuación de Legendre. Esta tiene la forma

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \tag{6.14}$$

donde n es un entero no-negativo. Escribiendo esta ecuación como

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y = 0,$$

se tiene que $P(x) = -\dfrac{2x}{1-x^2}$ y $Q(x) = \dfrac{n(n+1)}{1-x^2}$, por lo que ambas funciones son analíticas en 0 y admiten desarrollos en serie convergentes para $|x| < 1$. Por el teorema 6.3 se tiene que para a_0, a_1 constantes arbitrarias el problema tiene una única solución $y(x)$ que es analítica en 0, que es solución de la ecuación para $|x| < 1$ y que satisface las condiciones iniciales $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$.

Intentamos

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

de donde

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

que escribimos como

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[n^2+n-k^2+k\right] c_k x^k = 0.$$

Esta ecuación se puede a su vez escribir como

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[n^2+n-k^2+k-2k\right] c_k x^k = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $k-2 \to k$ en la primera serie, se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left[n^2+n-k^2-k\right] c_k x^k = 0$$

que se puede escribir como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)c_{k+2} + (n^2+n-k^2-k)c_k\right] x^k = 0.$$

Por la unicidad de series se debe tener que

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + \left[n^2+n-k^2-k\right] c_k = 0,$$

que nos da

$$c_{k+2} = -\frac{\left[n^2+n-k^2-k\right]}{(k+2)(k+1)} c_k$$

o

$$c_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)} c_k. \tag{6.15}$$

Evaluemos algunos términos

$$k = 0, \qquad c_2 = -\frac{n(n+1)}{2 \cdot 1} c_0$$

$$k = 1, \qquad c_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3 \cdot 2} c_1$$

$$k = 2, \qquad c_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4 \cdot 3} c_2 = \frac{(n-2)(n+3)n(n+1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} c_0,$$

de donde

$$c_4 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} c_0.$$

$$k = 3, \qquad c_5 = \frac{-(n-3)(n+4)}{5 \cdot 4} c_3 = \frac{(n-3)(n+4)(n-1)(n+2)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} c_1,$$

de donde

$$c_5 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} c_1$$

De la misma forma

$$k = 4, \qquad c_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{6 \cdot 5} c_4 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} c_0$$

y

$$k = 5, \qquad c_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{7 \cdot 6} c_5 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} c_1.$$

Vemos que el término general depende de si j es par o impar. No es difícil ver que

$$c_{2j} = \frac{(-1)^j (n-(2j-2))...(n-2)n(n+1)(n+3)...(n+2j-1)}{(2j)!} c_0, \tag{6.16}$$

y que

$$c_{2j+1} = (-1)^j \frac{[n-(2j-1)]\,...(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)...(n+2j)}{(2j+1)!} c_1. \quad (6.17)$$

Estas fórmulas hay que demostrarlas por inducción. Revisemos la expresión para c_{2j}. Para $j = 1$ de (6.16), se obtiene

$$c_2 = -\frac{n(n+1)}{2!} c_0$$

que es lo que debemos tener. Suponemos ahora (6.16) válida para j y queremos demostrarla para $j+1$. De (6.15) se tiene que

$$c_{2(j+1)} = c_{2j+2} = -\frac{(n-2j)(n+2j+1)}{(2j+2)(2j+1)} c_{2j}$$

y usando la hipótesis de inducción (6.16), nos da

$$c_{2(j+1)} = (-1)^{j+1} \frac{(n-2j)(n+2j+1)}{(2j+2)(2j+1)}$$

$$\times \frac{(n-(2j-2)) - (n-3)n(n+1)(n+3)..(n+2j-1)}{(2j)!},$$

que se puede escribir

$$c_{2j+2} = (-1)^{j+1} \frac{(n-2j)(n-(2j-2))...(n-3)n(n+1)(n+3)\cdots(n+2j-1)(n+2j+1)}{(2j+2)!}$$

que corresponde a cambiar j por $j+1$ en (6.16).

Ejercicio. Compruebe el coeficiente c_{2j+1}, por un método similar.

Podemos entonces escribir la solución de la ecuación como

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$$

donde

$$y_1(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{(n-2j+2)...(n-2)n(n+1)...(n+2j-1)}{(2j)!} x^{2j},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{(n-2j+1)...(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)...(n+2j)}{(2j+1)!} x^{2j+1}.$$

Ejercicio. Aplicando el criterio de cuociente demuestre directamente que ambas series convergen para $|x| < 1$, que esta de acuerdo con lo que dice el teorema 6.3. Demuestre también que y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación (6.14).

Notemos a continuación que si n es par, entonces $y_1(x)$ tiene un número finito de términos y si n es impar entonces $y_2(x)$ tiene un número finito de términos, dando origen a polinomios. En ambos casos el polinomio resultante lo llamamos polinomio de Legendre y lo denotamos por $P_n(x)$.

Se tiene que $P_0(x) = 1$ es solución de la ecuación para $n = 0$, esto es

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0,$$

$P_1(x) = x$ es solución de la ecuación para $n = 1$, esto es

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ es solución de la ecuación para $n = 2$, esto es

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0,$$

etc.

$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots, P_n(x)$ son soluciones de distintas ecuaciones.

A continuación vamos a encontrar una fórmula general para estos polinomios. Partimos de

$$c_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)} c_k$$

que escribimos como

$$c_k = -\frac{(k+2)(k+1)}{(n-k)(n+k+1)} c_{k+2}.$$

En vez de expresar los coeficientes en función de c_0 y c_1 los vamos a expresar en términos de c_n. Haciendo el cambio de variable

$$k+2=j \quad \text{o} \quad k=j-2,$$

se tiene

$$c_{j-2}=\frac{-j(j-1)}{(n-j+2)(n+j-1)}c_j.$$

Para el calculo de estos polinomios notamos que si n es par entonces

$$P_n(x)=c_0+c_2x^2+c_4x^4+\cdots+c_{n-2}x^{n-2}+c_nx^n$$

y si n es impar entonces

$$P_n(x)=c_1x+c_3x^3+\cdots+c_{n-2}x^{n-2}+c_nx^n.$$

Dando a j los valores n, $n-2$,..., tenemos que

$$c_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}c_n$$

$$c_{n-4}=-\frac{(n-2)(n-3)}{2^2(2n-3)}c_{n-2}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 2^2(2n-1)(2n-3)}c_n.$$

Ejercicio. Demuestre por inducción que

$$c_{n-2k}=\frac{(-1)^k n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{k!2^{2k}(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)}c_n. \tag{6.18}$$

Así, se obtiene:

$$P_n(x)=c_n[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{22^2(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}$$

$$+\cdots+(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{k!2^k(2n-1)\cdots(2n-2k+1)}x^{n-2k}+\cdots],$$

donde la sumatoria se extiende hasta $k=\frac{n}{2}$ si n es par, y hasta $n-2k=1$ si n es impar. En este último caso $k=\frac{n-1}{2}=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$, y si $n=2l+1$ entonces $k=l$. Por esto k es el mayor entero menor o igual a $\frac{n}{2}$, que denotamos por $k=\left[\frac{n}{2}\right]$. Así para ambos casos el limite de la suma es $k=\left[\frac{n}{2}\right]$.

De esta forma se tiene que

$$P_n(x) = c_n \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{k!2^k(2n-1)\cdots(2n-2k+1)} x^{n-2k}.$$

Notemos ahora que $n(n-1)\cdots(n-2k+1) = \dfrac{n!}{(n-2k)!}$ y que

$$(2n-2k+1)(2n-2k+3)\cdots(2n-3)(2n-1) =$$

$$= \frac{(2n-2k+1)(2n-2k+2)(2n-2k+3)(2n-2k+4)\cdots(2n-1)2n}{(2n-2k+2)(2n-2k+4)\cdots(2n-2)2n}$$

$$= \frac{(2n)!}{1\cdot 2\cdots(2n-2k)\, 2^k(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)n}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n-2k)!}\frac{(n-k)!}{2^k n!}.$$

Así se tiene que

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{k!2^k(2n-1)\cdots(2n-2k+1)} = \frac{n!}{(n-2k)!k!2^k}\cdot\frac{n!2^k\cdot(2n-2k)!}{(2n)!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n!)^2(2n-2k)!}{k!(n-2k)!(2n)!(n-k)!}.$$

Normalizando de modo que

$$c_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot 2^n}$$

obtenemos que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-2k)!(n-k)!} x^{n-2k}.$$

Esta expresión para los polinomios se puede compactar más todavía hasta llegar a la fórmula para los polinomios de Legendre conocida como la formula de Rodríguez. Para esto notamos primero que

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2k} = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}$$

por lo que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{2^n k!(n-k)!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k})$$

$$= \frac{d^n}{dx^n}(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{2^n k!(n-k)!}x^{2n-2k}).$$

Notemos ahora que para $k \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, $2k \geq 2\left[\frac{n}{2}\right] + 2$, se tiene que

$$2n - 2k \leq 2n - 2\left[\frac{n}{2}\right] - 2 = 2\left[n - [n/2] - 1\right] < n.$$

Esto combinado con el hecho que

$$\frac{d^n x^j}{dx^n} = 0 \qquad \text{si} \qquad j < n$$

nos permite escribir

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^n k!(n-k)!}x^{2n-2k})$$

ya que todas las potencias que hemos agregado en la sumatoria son menores que n. De aquí

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k (x^2)^{n-k},$$

de donde por la fórmula de binomio obtenemos finalmente

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

que es la fórmula de Rodríguez para los polinomios de Legendre.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Vamos a hacer aquí un paréntesis para lo siguiente. Supongamos que $\{\phi_n\}$ es una sucesión de funciones (continuas) $\phi_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ que satisfacen la propiedad

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ \alpha_n \neq 0 & \text{si} \quad m = n, \end{cases}$$

entonces estas funciones se dice que son ortogonales o que forman un conjunto ortogonal. Si además $\alpha_n = 1$ se dicen que son ortonormales.

Vamos a probar a continuación que los polinomios de Legendre forman un conjunto ortogonal.

Si ponemos $u(x) = P_n(x)$, $v(x) = P_m(x)$, se tiene que u y v satisfacen respectivamente las ecuaciones diferenciales

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' + n(n + 1)u = 0$$

y

$$(1 - x^2)v'' - 2xv' + m(m + 1)v = 0.$$

Multiplicando la primera ecuación por v y la segunda por u y restando las ecuaciones resultantes, se obtiene

$$(1 - x^2)(u''\ v - v''u) - 2x(u'v - v'u) =$$

$$= uv \left[m^2 + m - n^2 - n\right] = uv(m - n)\left[m + n + 1\right].$$

Sea ahora $w = u'v - v'u$, entonces reemplazando en la ecuación anterior

$$(1 - x^2)w' - 2xw = uv(m - n)(m + n + 1)$$

e integrando esta ecuación desde -1 a 1, se tiene

$$\int_{-1}^{1} [(1 - x^2)w' - 2xw]dx = \int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}[(1 - x^2)w]dx = (m - n)(m + n + 1) \int_{-1}^{1} uvdx$$

de donde

$$0 = (m - n)(m + n + 1) \int_{-1}^{1} uvdx$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

que implica

$$\int_{-1}^{1} uvdx = 0 \quad \text{si} \quad m \neq n,$$

esto es

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \qquad \text{si} \qquad n \neq m.$$

Así los polinomios de Legendre son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$.

Ejercicio. Demuestre que

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1} \tag{6.19}$$

Ejercicio. Demuestre que si $P(x)$ es un polinomio cualquiera de grado $k \geq 0$, entonces

$$\int_{-1}^{1} P(x)P_n(x)dx = 0 \quad \text{para todo} \quad n > k$$

Teníamos de antes que

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

A partir de estas fórmulas se tiene que

$$1 = P_0(x), \quad x = P_1(x), \quad x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x), \quad x^3 = \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_3(x).$$

De aquí que todo polinomio de tercer grado $p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ se pueda escribir de la forma

$$p(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n P_n(x).$$

Ejercicio. Encuentre los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Es claro que podemos generalizar este caso y expresar x^n como una combinación lineal de $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)$. De aquí que todo polinomio $p(x)$ de grado l admita un desarrollo en término de los polinomios $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_l(x)$ de la forma

$$p(x) = \sum_{n=0}^{l} a_n P_n(x).$$

La pregunta relevante en este momento es saber cuando se puede desarrollar un función $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ en término de los polinomios de Legendre, en una expresión de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x). \tag{6.20}$$

Actuando de manera informal, multipliquemos (6.20) por $P_m(x)$ e integrando término a término se obtiene

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx,$$

que en vista de la propiedad de ortogonalidad de los polinomios y de (6.19), nos da

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) dx = \frac{2a_m}{2m+1}.$$

De aquí obtenemos una fórmula para a_n

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx. \tag{6.21}$$

Todos estos cálculos se pueden justificar rigurosamente para una cierta clase de funciones f. Especificamente vamos a dar uno de estos resultados, sin demostración.

Teorema 6.4. *Sea $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ tal que f, f' son contínuas a trozos en $[-1, 1]$, entonces la serie*

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

donde

$$a_n = (n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$$

converge a $f(x)$ en cualquier punto $x \in (-1, 1)$ de continuidad de $f(x)$. Si ahora $x \in (-1, 1)$ es un punto de discontinuidad de f y $f(x_-)$, $f(x_+)$ denotan los límites laterales de $f(x)$, entonces la serie converge a

$$\frac{1}{2} \left[f(x_-) + f\left(x_+\right) \right].$$

En $x = \pm 1$ la serie converge respectivamente a $f(-1_+)$ y $f(1_-)$. En particular si $f(x)$, $f'(x)$ son contínuas en $[-1, 1]$, entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad x \in [-1, 1].$$

Vamos a estudiar otra propiedad de los polinomios de Legendre.

Sea $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ una función tal que $\int_{-1}^{1} f(x)^2(x) dx < \infty$ (suponga que f satisface las hipótesis del teorema anterior). Se quiere aproximar f por un polinomio $p(x)$ de grado $\leq n$ de tal modo que

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - p(x)|^2 dx$$

sea mínimo. Vamos a probar que este mínimo se alcanza y queda dado por la suma de los primeros $n + 1$ términos de (6.20)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x), \tag{6.22}$$

con los coeficientes a_k dados por (6.21).

Para la demostración partimos del hecho que todo polinomio de grado menor o igual a n se puede expresar en la forma $\sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x)$. Sea entonces

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$I = \int_{-1}^{1} (f(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x))^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} b_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{n} b_k [\int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx]$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} b_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{2a_k}{2k+1}$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} (b_k - a_k)^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} a_k^2.$$

Los coeficientes a_k están fijos ya que la función f es dada. Entonces es claro que I toma su valor mínimo cuando $b_k = a_k$, para $k = 0, \cdots, n$. Esto termina la demostración de la propiedad.

Vamos a introducir a continuación una herramienta poderosa para trabajar con polinomios de Legendre, la función generadora.

Definamos la función

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{6.23}$$

donde $x \in (-1,1)$ y $|t| < 1$ es pequeño. Para cada x se tiene que podemos escribir

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) t^n. \tag{6.24}$$

No es muy dificil ver que podemos derivar parcialmente para obtener

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \phi}{\partial x} + t \frac{\partial^2 (t\phi)}{\partial t^2} = 0.$$

Substituyendo la serie de potencias nos queda

$$(1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} q_n''(x) t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} q_n'(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) q_n(x) t^n = 0,$$

que podemos escribir como

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(1-x^2)q_n''(x) - 2xq_n'(x) + n(n+1)q_n(x)]t^n = 0.$$

Se debe tener entonces que cada coeficiente es cero, esto es, $q_n(x)$ debe satisfacer

$$(1-x^2)q_n''(x) - 2xq_n'(x) + n(n+1)q_n(x) = 0.$$

que es la ecuación de Legendre. Como los q_n son polinomios en x se debe tener que $q_n(x) = P_n(x)$, y se obtiene la relación

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \tag{6.25}$$

Mostremos la utilidad de la función generadora. Cambiemos t por $-t$ y x por $-x$ en (6.25), se obtiene

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-1)^n t^n,$$

que comparando con (6.25), nos dice que se debe tener que

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

En particular de aquí si n es impar se tiene que $P_n(0) = 0$. También $P_n(1) = 1$ y por lo tanto $P_n(-1) = (-1)^n P_n(1)$.

Finalmente vamos a probar una relación de recurrencia para los polinomios de Legendre. Partimos derivando (6.25) respecto de t con x fijo. Se tiene

$$\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1},$$

que implica

$$\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}} = (1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1},$$

esto es

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} = (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n,$$

que se puede escribir como

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n = (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

Expandiendo se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^{n+2}$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1}.$$

que se puede escribir como

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^n$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n.$$

Ordenando

$$P_1(x) + 2P_2(x)t - 2xP_1(x)t - xP_0(x) - xP_1(x)t + P_0(x)t$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - 2x\sum_{n=2}^{\infty} nP_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^n$$

$$= x\sum_{n=2}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n.$$

Ejercicio. Demuestre que

$$P_1(x) + 2P_2(x)t - 2xP_1(x)t - xP_0(x) - xP_1(x)t + P_0(x)t \equiv 0.$$

Con esto, se tiene

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) - xP_n(x) + P_{n-1}(x)]t^n = 0.$$

Simplificando

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x)]t^n = 0,$$

por lo que se obtiene la relación

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

o

$$(2n+1)xP_n(x) = nP_{n-1}(x) + (n+1)P_{n+1}(x),$$

que vale para todo $n \geq 1$.

6.3. Caso donde existen puntos singulares. Volvamos a la ecuación (6.5)

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{6.26}$$

donde ahora suponemos que $x_0 \in I$ es un punto singular de la ecuación.

Definición 6.2. Decimos que x_0 es un punto singular regular de la ecuación si

$$(x-x_0)P(x) \quad \text{y} \quad (x-x_0)^2Q(x)$$

son funciones analíticas en x_0. Es decir se pueden desarrollar en series de $x - x_0$ con un radio de convergencia positivo. Si el punto x_0 es singular pero no regular decimos que es un punto singular irregular de la ecuación

Ejemplo. Ecuación de Bessel.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

donde ν es un número real. Escribiendo esta ecuación en la forma (6.5) con

$$P(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}$$

es claro que $x_0 = 0$ es un punto singular regular de la ecuación.

En lo que sigue solo vamos a considerar el caso de puntos singulares regulares, además vamos a suponer por simplicidad de los cálculos que este punto es el 0. Consideramos entonces la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

donde suponemos que $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ son analíticas en 0 y por lo tanto los podemos desarrollar en serie en una vecindad del cero en la forma

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n. \tag{6.27}$$

que suponemos validos en un intervalo de la forma $|x| < R$.

Esta vez vamos a intentar encontrar una solución en la forma

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n},$$

que se llaman series de Frobenius. El método que vamos a desarrollar se llama método de Frobenius.

Vamos a suponer que $x > 0$ en nuestros cálculos. Derivando se obtiene

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(m+n)a_n x^{m+n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(m+n)(m+n-1)a_n x^{m+n-2},$$

que se pueden escribir como

$$y'(x) = x^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)a_n x^n, \qquad y''(x) = x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)(m+n-1)a_n x^n,$$

Reemplazando en la ecuación diferencial estos desarrollos en serie, usando producto de series, después de cierto trabajo se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$a_n(m+n)(m+n-1)+\sum_{k=0}^{n} a_k[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}]=0. \tag{6.28}$$

Para $n=0$, se tiene

$$a_0 m(m-1)+(mp_0+q_0)a_0=0,$$

que definiendo

$$g(m)=m(m-1)+mp_0+q_0, \tag{6.29}$$

se escribe como

$$a_0 g(m)=0. \tag{6.30}$$

Para $n=1$, se obtiene

$$a_1(m+1)m+a_0[mp_1+q_1]+a_1[(m+1)p_0+q_0],$$

que se escribe

$$a_1 g(m+1)+a_0[mp_1+q_1]=0. \tag{6.31}$$

Más generalmente de (6.28), para $n\geq 1$, se obtiene

$$a_n[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0]+\sum_{k=0}^{n-1} a_k[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}]=0,$$

que se puede escribir como

$$a_n g(m+n)+\sum_{k=0}^{n-1} a_k[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}]=0. \tag{6.32}$$

Como $a_0\neq 0$, de (6.30), se tiene que

$$g(m)=m(m-1)+mp_0+q_0=0, \tag{6.33}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

que se llama la ecuación indicial. Las raices de esta ecuación se llaman exponentes de la ecuación diferencial en el punto singular regular $x = 0$. Las siguientes ecuaciones (6.31) y (6.32) nos permiten evaluar el resto de los coeficientes a menos que $g(m + n) = 0$ para algún entero positivo n, en cuyo caso el proceso falla. Así si $m_1 = m_2 + n$ para algún entero $n \geq 1$, la elección $m = m_1$ en el proceso anterior nos va a dar una solución, pero si hacemos $m = m_2$ en general no obtendremos otra solución por este método. Si $m_1 = m_2$ nuevamente el procedimiento nos dará una sola solución. Si la ecuación indicial tiene dos raices reales y distintas m_1, m_2, y $m_1 \neq m_2 + n \quad \forall\, n \geq 1$, el procedimiento nos dará dos series solución. Finalmente en este análisis, es posible que las raices de la ecuación indicial sean complejas. En lo que sigue vamos a suponer que las raices de la ecuación indicial son reales. Se tiene el siguiente teorema importante.

Teorema 6.5. *Consideremos la ecuación (6.26) para la cual suponemos que $x = 0$ es un punto singular regular. Suponemos también que los desarrollos en serie de potencias de $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ son convergentes en el intervalo $|x| < R$, con $R > 0$. Sean m_1, m_2 los exponentes de la ecuación diferencial en $x = 0$, con $m_2 \leq m_1$. Entonces la ecuación (6.26) tiene por lo menos una solución*

$$y_1(x) = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0),$$

en el intervalo $0 < x < R$. Los coeficientes a_n, $n \geq 1$ se determinan de la fórmula (6.32), con $m = m_1$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| < R$. Si además $m_1 - m_2$ no es un entero positivo o cero, entonces la ecuación (6.26) tiene una segunda solución linealmente independiente con la primera

$$y_2(x) = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0),$$

en ese mismo intervalo. Los nuevos coeficientes a_n se determinan de la fórmula (6.32), con $m = m_2$, la serie resultante $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| < R$.

Con este teorema no tenemos información cuando $m_1 - m_2$ es cero o una entero positivo. Podemos distinguir tres casos. Si $m_1 = m_2$ es claro que no puede existir una segunda solución en serie de Frobenius. Supongamos $m_1 - m_2$ es un entero positivo. Entonces reemplazando $m = m_2$ en (6.32) nos queda

$$a_n g(m_2 + n) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k[(m_2 + k)p_{n-k} + q_{n-k}]. \tag{6.34}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

donde sabemos que la dificultad consiste en que $g(m_2+n)=0$ para algún entero positivo. Cuando esto pasa y el lado derecho (6.34) no es cero entonces no hay forma de continuar el método de Frobenius para obtener una segunda serie. Sin embargo si sucede que el lado derecho en (6.34) es cero cuando $g(m_2+n)=0$ entonces a_n queda arbitraria y en particular al podemos tomar igual a cero y continuar calculando el resto de los coeficientes obteniendo así una segunda solución en serie de Frobenius. Los tres casos expuestos suceden en las aplicaciones.

La pregunta aquí es como se hace cuando estamos en la situación en que m_1-m_2 es un entero positivo o cero y NO podemos encontrar otra solución por Frobenius. Para examinar este caso sea $k=m_1-m_2+1$. La ecuación indicial (6.33) se escribe

$$(m-m_1)(m-m_2)=m^2-(m_1+m_2)m+m_1m_2=0.$$

Así que comparando con (6.33) se debe tener $p_0-1=-(m_1+m_2)$, que implica $m_2=1-p_0-m_1$, y por lo tanto $k=2m_1+p_0$.

Para encontrar una segunda solución linealmente independiente con y_1 recurrimos a un método conocido. Ponemos primero $y_2(x)=y_1(x)v(x)$ y recordamos que entonces

$$v'(x)=\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}=\frac{e^{-\int P(x)dx}}{x^{2m_1}(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)^2}$$

$$=\frac{e^{(-p_0\log x-p_1x-\cdots)}}{x^{2m_1}(a_0+a_1x+\cdots)^2}=\frac{e^{(-p_1x-\cdots)}}{x^k(a_0+a_1x+\cdots)^2}=\frac{g(x)}{x^k},$$

donde $g(x)$ es claramente una función analítica en 0 y por lo tanto en un entorno de 0 tiene la forma

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\qquad (b_0\neq 0).$$

Así entonces

$$v'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-k}=b_0x^{-k}+b_1x^{1-k}+\cdots+b_{k-1}x^{-1}+b_k+\cdots..,$$

para $x>0$, y de donde

$$v(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-k}=\frac{b_0x^{-k+1}}{-k+1}+\frac{b_1x^{-k+2}}{-k+2}+\cdots+b_{k-1}\log x+b_kx+\cdots.$$

Formando $y_2(x) = y_1(x)v(x)$, resulta

$$y_2(x) = y_1(x)(\frac{b_0 x^{-k+1}}{-k+1} + \frac{b_1 x^{-k+2}}{-k+2} + \cdots + b_{k-1}\log x + b_k x + \cdots)$$

$$= y_1(x)(\frac{b_0 x^{-k+1}}{-k+1} + \frac{b_1 x^{-k+2}}{-k+2} + \cdots + b_{k-1}\log x + b_k x + \cdots),$$

que escribimos como

$$y_2(x) = b_{k-1}y_1(x)\log x + x^{m_1}(a_0 + a_1 x + \cdots)(\frac{b_0 x^{-k+1}}{-k+1} + \frac{b_1 x^{-k+2}}{-k+2} + \cdots + b_k x + \cdots).$$

Sacando el factor x^{-k+1} fuera del último paréntesis y usando que $k = m_1 - m_2 + 1$, se obtiene que y_2 toma la forma

$$y_2(x) = b_{k-1}y_1(x)\log x + x^{m_2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{6.35}$$

para ciertos coeficientes c_n.

Supongamos ahora que $m_1 = m_2$. Entonces $k = 1$ y $b_{k-1} = b_0 \neq 0$. Así la segunda solución queda

$$y_2(x) = y_1(x)\log x + x^{m_1}\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,$$

para ciertos coeficientes c_n y donde sin pérdida de generalidad hemos supuesto que $b_0 = 1$.

Si ahora $k - 1 = m_1 - m_2$ es un entero positivo, entonces b_{k-1} puede o no ser 0, lo que dice que el término con el logaritmo en (6.35) puede o no estar presente en la segunda solución. En un problema práctico es mejor encontrar la segunda solución directamente suponiendo la solución en la forma (6.35).

Apliquemos estos resultados a la ecuación de Bessel, donde de ahora en adelante $\nu > 0$,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

que escribimos

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2-\nu^2}{x^2}y = 0.$$

Así $P(x) = \frac{1}{x}$, y $Q(x) = \frac{x^2-\nu^2}{x^2}$. De aquí vemos que $xP(x) = 1$ y $x^2Q(x) = x^2-\nu^2$ por lo que se tiene $p_0 = 1$, $p_n = 0$, $n \geq 1$. También $q_0 = -\nu^2$, $q_2 = 1$ y el resto de los q_n son cero. Podemos entonces escribir la ecuación indicial para este caso, se tiene

$$g(m) = m(m-1) + mp_0 + q_0 = m^2 - m + m - \nu^2 = 0,$$

de donde $m = \pm\nu$. De acuerdo al Teorema 6.5 suponemos una solución en la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu}$$

Derivando

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)(n+\nu-1) x^{n+\nu-2}.$$

Reemplazando en la ecuación:

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^{n+\nu}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\nu)x^{n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = 0,$$

que se puede escribir como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(n+\nu)(n+\nu-1) + (n+\nu) - \nu^2\right] x^{n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu+2} = 0.$$

Notemos primero que

$$(n+\nu)(n+\nu-1) + (n+\nu) - \nu^2 = (n+\nu)^2 - \nu^2,$$

así la serie se puede escribir como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(n+\nu)^2 - \nu^2\right] x^{n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu+2} = 0.$$

Notando que el coeficiente de a_0 en la primera serie es cero, y que $(n+\nu)^2 - \nu^2 = n^2 + 2n\nu$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[n^2 + 2n\nu\right] x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0,$$

donde también hemos simplificado el término x^ν.

Desarrollando obtenemos

$$a_1(1+2\nu)x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n^2 + 2n\nu)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0, \tag{6.36}$$

de donde $a_1 = 0$, así que se tiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n^2 + 2n\nu)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0.$$

Vamos a juntar ambas series, para eso hacemos el cambio de variable n por $n+2$ en la primera serie, para obtener

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}((n+2)^2 + 2(n+2)\nu)x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0,$$

que se puede escribir como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+2}(n+2)(n+2+2\nu) + a_n\right] x^{n+2} = 0.$$

En la forma acostumbrada esto implica la ley de recurrencia

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+2+2\nu)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Ya que $a_1 = 0$ esta ecuación nos dice que todos los coeficientes a_j con j impar son nulos. Haciendo $2k = n + 2$, se tiene

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+2\nu)} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2 k(k+\nu)}.$$

De aquí, para $k = 1$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(1+\nu)}.$$

Ejercicio. Pruebe por inducción que

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(1+\nu)(2+\nu)..(k+\nu)},$$

para $k \in \mathbb{N}$. Recordando a continuación que para $x > 0$ la función $\Gamma(x)$ satisface

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

se tiene que

$$\Gamma(1+k+\nu) = (1+\nu)....(k+\nu)\Gamma(1+\nu),$$

por lo que

$$(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)....(k+\nu) = \frac{\Gamma(1+k+\nu)}{\Gamma(1+\nu)},$$

así

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k \Gamma(1+\nu)}{2^{2k} k! \Gamma(1+k+\nu)} a_0.$$

Recordando ahora que

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+\nu}$$

se obtiene:

$$y(x) = a_0\Gamma(1+\nu)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k}k!\Gamma(1+k+\nu)}.$$

Normalizando tal que

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}$$

se tiene

$$J_\nu(x) := y(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+\nu)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu},$$

que se llama la función de Bessel de primera clase (de orden ν).

Estudiemos la convergencia de la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+\nu)}(\frac{x}{2})^{2k}$$

directamente. Llamando $d_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+\nu)}$, del criterio del cuociente se tiene que la serie converge si

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{d_{2k+2}}{d_{2k}}\right|(\frac{x}{2})^2 &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!\Gamma(2+k+\nu)}\right|\left|\frac{k!\Gamma(1+k+\nu)}{(-1)^k}\right|(\frac{x}{2})^2\\ &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{(k+1)(1+k+\nu)}\right|(\frac{x}{2})^2 < 1,\end{aligned}$$

que es cierta para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto el radio de convergencia de la serie es infinito. De aqui que

$$J_\nu(x) = (\frac{x}{2})^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+\nu)}(\frac{x}{2})^{2k},$$

está bien definida para todo $x > 0$.

Tenemos así una solución de la ecuación de Bessel y queremos formar la solución general (en $x > 0$) por lo que necesitamos otra solución linealmente independiente con esta. Esta segunda solución se llama función de Bessel de segunda clase (de orden ν).

De nuestros resultado sabemos como encontrar esta solución si se tiene que $m_1 - m_2 = \nu - (-\nu) = 2\nu$ no es un entero positivo o cero (recuerde que supusimos $\nu >$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

0), esto si ν es un entero positivo o un entero positivo dividido por 2. Supongamos primero que ν no es un entero positivo. Entonces razonando como antes se obtiene

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k-\nu)} (\frac{x}{2})^{2k-\nu}.$$

El problema que podría suceder es en la ecuación (6.36), que ahora toma la forma

$$a_1(1-2\nu)x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-2\nu)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0.$$

En efecto si $\nu = \frac{1}{2}$ entonces a_1 no es necesariamente 0 como antes. Sin embargo como lo que buscamos es una solución distinta de $J_\nu(x)$ podemos hacer $a_1 = 0$ y proceder exactamente como antes para obtener la serie que define $J_{-\nu}(x)$. Notamos que un efecto similar se tiene si $\nu = \frac{3}{2}$ dificultad que resolvemos tomando $a_1 = a_3 = 0$. Entonces es claro como proceder cuando ν es un entero positivo dividido por 2.

Observamos que en $J_{-\nu}(x)$ hay potencias negativas de x así que nos hemos restringido a $x > 0$, como lo habíamos supuesto originalmente.

Observamos por otro lado que como los primeros términos de $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ (dominantes cerca de cero) son respectivamente

$$\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu},$$

es claro que J_ν y $J_{-\nu}$ son linealmente independientes en $(0,\infty)$.

Note también que $J_{-\nu}$ es singular en 0, esto es $\lim_{x\to 0^+} |J_{-\nu}(x)| = \infty$.

La solución de la ecuación de Bessel es entonces

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x),$$

si ν no es un entero positivo.

Ejemplo.- Encuentre la solución de la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0.$$

Se tiene que $\nu = \frac{1}{2}$ por lo que la solución es

$$y(x) = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

Si $\nu = l$, entero positivo, se tiene que

Ejercicio.

$$J_{-l}(x) = (-1)^l J_l(x),$$

y las soluciones no son linealmente independientes así que hay que usar otro método.

Podemos intentar usar lo que expusimos anteriormente basados en una antiguo conocido, sin embargo es costumbre usar otro camino. Para esto partimos del caso del caso en que ν no es un entero y definimos

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{6.37}$$

Entonces $J_\nu(x)$ y $Y_\nu(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel (demostrarlo), por lo que toda solución de esta ecuación (para $x > 0$) se puede escribir como

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x),$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias. En particular, se tiene

$$J_{-\nu}(x) = J_\nu(x)\cos\nu\pi - Y_\nu(x)\sin\nu\pi.$$

Supongamos ahora que m es un entero positivo y queremos encontrar la segunda solución correspondiente a $J_m(x)$. La idea es partir de (6.37) con ν proximo a m y hacerlo tender ν a m, esto es buscar el $\lim\limits_{\nu\to m} Y_\nu(x)$. Se puede demostrar que

$$J_\nu(x) \to J_m(x),$$

$$J_{-\nu}(x) \to J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x),$$

$$\cos\nu\pi \to \cos m\pi = (-1)^m,$$

por lo tanto

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x) \to J_m(x)(-1)^m - (-1)^m J_m(x) = 0.$$

Como también el denominador

$$\operatorname{sen}\nu\pi \to \sin m\pi = 0,$$

tenemos una indeterminación y aplicamos L'Hopital. Tomando límite en (6.37), se tiene

$$\lim_{\nu\to m} Y_\nu(x) = \lim_{\nu\to m} \frac{\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}\cos\nu\pi - \pi J_\nu(x)\sin\nu\pi - \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}}{\pi\cos\nu\pi}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}(-1)^m - \dfrac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=m}}{\pi(-1)^m},$$

y simplificando

$$Y_m(x) = \frac{\left[\dfrac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^m\dfrac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=m}}{\pi}.$$

Se puede demostrar que $Y_m(x)$ es una solución linealmente independiente con $J_m(x)$. $Y_m(x)$ es una función de Bessel de segunda clase (de orden entero $m \geq 0$.) De esta forma la solución de la ecuación de Bessel cuando m es un entero positivo se puede escribir como

$$y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 Y_m(x).$$

Se puede demostrar que $Y_m(x)$ se puede escribir como

$$Y_m(x) = \frac{2}{\pi}J_m(x)(\log\frac{x}{2}+\gamma) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(H_n+H_{n+m})}{n!(n+m)!}(\frac{x}{2})^{m+2n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{2^{m-2n}(m-n-1)!}{n!\,x^{m-2n}}.$$

(Si $m=0$ el ultimo término se considera como cero).

En esta expresión

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

y γ denota la constante de Euler dada por

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \log n),$$

que vale aproximadamente 0.57722.

Ejercicio. Hay un conjunto de ecuaciones que a primera vista NO parecen ser ecuaciones de Bessel, pero en realidad lo son. Vamos a obtener aquí una familia de ellas.

Partamos de la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

y hagamos los siguientes cambios de variables

$$x = az^b \qquad \text{e} \qquad y = wz^c$$

donde a, b, c son constantes y w se va a mirar como la nueva incognita en función de z. Se tiene $\frac{dx}{dz} = abz^{b-1}$, de donde

$$z\frac{dx}{dz} = abz^b = bx.$$

Por otro lado

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz} = \frac{dw}{dz}z^c + wcz^{c-1}$$

por lo que

$$\frac{dy}{dx}\frac{bx}{z} = \frac{dw}{dz}z^c + wcz^{c-1}$$

y

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}z^{c+1}\frac{dw}{dz} + \frac{c}{b}wz^c,$$

lo que implica

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}z^{c+1}\frac{dw}{dz} + \frac{c}{b}y$$

Derivando esta ecuación respecto de z, usando la ecuación de Bessel, después de cierto trabajo que incluye algunas substituciones se encuentra la siguiente ecuación

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + (2c+1)z\frac{dw}{dz} + \left[a^2b^2z^{2b} + (c^2 - b^2\nu^2)\right]w = 0. \qquad (6.38)$$

Ilustremos como se usa esta fórmula mediante un

Ejemplo. Consideremos la ecuación de Airy

$$w'' + zw = 0,$$

las derivadas son con respecto a z. Esta ecuación no tiene la forma de una de Bessel, veremos sin embargo que su solución se puede expresar en términos de funciones de Bessel.

En (6.38) hagamos $c = -\frac{1}{2}$, $b^2\nu^2 = c^2 = \frac{1}{4}$ que implica $\nu^2 = \frac{1}{4b^2}$. Con esto (6.38) se reduce a

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + a^2b^2z^{2b}w = 0$$

Haciendo entonces $a^2b^2 = 1$, se obtiene

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z^{2b}w = 0,$$

y finalmente haciendo $2b - 2 = 1$ se tiene

$$\frac{d^2w}{dz^2} + zw = 0,$$

que es la ecuación que queríamos. Veamos a continuación de que ecuación de Bessel viene. Tenemos que $b = \frac{3}{2}$ y por lo tanto $a = \frac{2}{3}$. También $\nu^2 = \frac{1}{4b^2} = \frac{1}{9}$ por lo que $\nu = \frac{1}{3}$.

Entonces la ecuación de Bessel es

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{3^2})y = 0$$

donde $x = az^b = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$ e $y = wz^c = wz^{-\frac{1}{2}}$. La solución de la ecuación de Bessel es entonces

$$y(x) = c_1 J_{\frac{1}{3}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}(x)$$

y reemplazando

$$w(z) = z^{1/2}\left[c_1 J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right].$$

En esta parte final vamos a estudiar algunas propiedades de la función de Bessel $J_\nu(x)$. Recordemos que para todo $\nu \in \mathbb{R}$ se tiene

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+n+\nu)}(\frac{x}{2})^{2n+\nu}.$$

que es solución de

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

que para $x > 0$, se puede escribir como

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2-\nu^2}{x^2}y = 0.$$

Se puede demostrar que toda solución (no trivial) de esta ecuación tiene una sucesión estrictamente creciente $\{\lambda_n\}$ de ceros positivos con $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Sean ahora $u(x) = J_\nu(ax)$ y $v(x) = J_\nu(bx)$, donde a y b son constantes positivas diferentes. Entonces es fácil ver que u y v satisfacen respectivamente

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \frac{a^2x^2-\nu^2}{x^2}u = 0,$$

y

$$v'' + \frac{1}{x}v' + \frac{b^2x^2-\nu^2}{x^2}v = 0.$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por v y la segunda por u y restando se obtiene

$$\frac{d}{dx}(u'v - uv') + \frac{1}{x}(u'v - uv') = (b^2 - a^2)uv,$$

que multiplicando por x se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}[x(u'v - uv')] = (b^2 - a^2)xuv.$$

Integrando de 0 a 1, resulta

$$(b^2 - a^2)\int_0^1 xuvdx = [x(u'v - uv')]_0^1 = (u'(1)v(1) - u(1)v'(1))$$

$$= aJ_\nu'(a)J_\nu(b) - bJ_\nu(a)J_\nu'(b),$$

que es cero si a y b son ceros distintos positivos de $J_\nu(x)$. De aquí se deduce

$$\int_0^1 xJ_\nu(\lambda_m x)J_\nu(\lambda_n x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ \frac{1}{2}[J_{\nu+1}(\lambda_n)]^2 & \text{si} \quad m = n. \end{cases}$$

Esto nos dice que las funciones de Bessel $J_\nu(x)$ son ortogonales con una función peso $w(x) = x$. De aquí se sigue el siguiente teorema de desarrollo de funciones en series de funciones de Bessel.

Teorema 6.6. *Sea $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ tal que f, f' son contínuas a trozos en $[0,1]$. Para $0 < x < 1$ la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_\nu(\lambda_n x)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\lambda_n)]^2}\int_0^1 xf(x)J_\nu(\lambda_n x)dx,$$

converge a $f(x)$ en cualquier punto $x \in (0,1)$ de continuidad de $f(x)$. Si ahora $x \in (0,1)$ es un punto de discontinuidad de f y $f(x_-)$, $f(x_+)$ denotan los límites laterales de $f(x)$, entonces la serie converge a

$$\frac{1}{2}\left[f(x_-) + f\left(x_+\right)\right].$$

En $x = 1$ *la serie converge a 0, y también converge a cero en* $x = 0$ *si* $\nu > 0$. *Si* $\nu = 0$ *entonces la serie converge a* $f(0+)$.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

6.4. Ejercicios resueltos.

Ejercicio 6.1. *Para la ecuación diferencial:*

$$xy'' + 4y' - xy = 0,$$

encuentre dos soluciones linealmente independientes en forma de series de potencia en torno a x=0.

Solución:
Se intenta encontrar una solución en la forma

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n},$$

Suponiendo que $x > 0$, derivando se obtiene

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) a_n x^{m+n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) a_n x^{m+n-2},$$

que se pueden escribir como

$$y'(x) = x^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) a_n x^n, \qquad y''(x) = x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) a_n x^n,$$

Reemplazando en la ecuación diferencial estos desarrollos en serie, se obtiene

$$(m(m-1)+4m)a_0 x^{m-1} + ((m+1)m - 4(1+m))a_1 x^m + \sum_{n=2}^{\infty} ((n+m)(n+m+3)a_k - a_{k-2}) x^{n+r-1} = 0$$

Se asume que $a_0 \neq 0$ y entonces la ecuación indicial es:

$$m^2 + 3m = 0.$$

Para $m = 0$, se calcula que $a_1 = 0$ y se obtiene la recurrencia:

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n+3)}.$$

Al resolver la recurrencia, resulta:

$$a_{2n} = \frac{a_0}{(2n+1)!(2n+3)}, \quad a_{2n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, ..$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course "Differential Equations" (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Por lo tanto una solución es la función (serie):

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!(2n+3)}.$$

Para $m = -3$, se calcula que $a_1 = 0$, pero a_3 queda libre y se iguala a cero para generar una solución con a_0. Se obtiene la recurrencia:

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n-3)}.$$

Al resolver la recurrencia, resulta:

$$a_{2n} = -\frac{a_0(2n-1)}{(2n)!}, \quad a_{2n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, ..$$

Por lo tanto una solución es la función (serie):

$$y_2(x) = -a_0 x^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)x^{2n}}{(2n)!}.$$

Finalmente la solución general es:

$$y(x) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!(2n+3)} + c_2 x^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)x^{2n}}{(2n)!}.$$

Ejercicio 6.2. *Considere la ecuación de Hermite:*

$$y'' - 2xy' + 2py = 0,$$

donde p es una constante.

(a) Resuelva la ecuación de Hermite mediante desarrollo en serie de potencias. Demuestre que cuando p es un entero par una de las series solución es un polinomio, y cuando p es un entero impar la otra serie es un polinomio.

(b) Se define como $H_n(x)$ el polinomio de Hermite de grado $n \geq 0$, encontrado en la parte (a), normalizado de modo que el factor de x^n es igual a 2^n. Calcule los polinomios $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ y $H_3(x)$.

(c) La función generadora de los polinomios de Hermite es:

$$\phi(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}.$$

Demuestre usando la función generadora que los polinomios de Hermite santisfacen la siguiente recurrencia:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

<u>Solución</u>:

Se intenta encontrar soluciones de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

Suponiendo que $x > 0$, derivando se obtiene

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2},$$

que se pueden escribir como

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n,$$

Reemplazando en la ecuación diferencial estos desarrollos en serie, se obtiene

$$2a_2 + pa_0 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2pa_n)x^n = 0$$

Se obtiene que $a_2 = -pa_0$ y se obtiene la recurrencia:

$$a_{n+2} = \frac{2(n-p)a_n}{(n+2)(n+1)}.$$

Al resolver la recurrencia para los terminos impares, resulta:

$$a_{2n+1} = \frac{2^n((2n-1)-p)((2n-3)-p)....(1-p)a_1)}{(2n+1)!} = \frac{a_1 2^n \prod_{i=0}^{n-1}(2i+1-p)}{(2n+1)!}, \quad n = 0,1,2,..$$

Al resolver la recurrencia para los terminos pares, resulta:

$$a_{2n} = \frac{2^n(2(n-1)-p)(2(n-2)-p)....(-p)a_0)}{(2n)!} = \frac{a_0 2^n \prod_{i=0}^{n-1}(2i-p)}{(2n)!}, \quad n = 0, 1, 2, ..$$

Entonces la solución general es:

$$y(x) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \prod_{i=0}^{n-1}(2i-p)x^{2n}}{(2n)!} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \prod_{i=0}^{n-1}(2i+1-p)x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Los polinomios pedidos se obtienen de las series anteriores:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

Al derivar la función generadora se obtiene:

$$(2x-2t)e^{2xt-t^2} = (2x-2t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)nt^n}{n!}$$

Esto es igual a a la derivada de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)nt^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)t^n}{n!}$$

Ahora se igualan coeficientes y se obtiene el resultado:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

7. Aspectos cualitativos de EDO No lineales

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$x' = f(x), \tag{7.1}$$

donde $f : R^n \to R^n$, que supondremos de clase C^1. Aquí

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad f(x_1 \cdots x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1 \cdots x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1 \cdots x_n) \end{bmatrix}.$$

La matriz Jacobiana de f en $x_0 \in R^n$, la denotamos por:

$$Df(x_0) = f'(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(x_0)}$$

Teorema 7.1. *El problema*

$$x' = f(x) \qquad x(a) = c,$$

$a \in R$, $c \in R^n$, tiene una única solución definida en un cierto intervalo I que contiene al punto a.

Definición 7.1. *Diremos que $x_0 \in R^n$ es un punto crítico o un punto de equilibrio de la ecuación (7.1) si $f(x_0) = 0$.*

Si x_0 es un punto crítico de (7.1), entonces $x(t) = x_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, es la única solución de (7.1) que satisface $x(\tau) = x_0$, $\tau \in R$ fijo cualquiera. Para x_0 punto crítico de (7.1), vamos a asociar la ecuación lineal:

$$x' = Df(x_0)(x - x_0), \tag{7.2}$$

Respecto de la matriz $Df(x_0)$ definimos:

n_0 el número de valores propios de $Df(x_0)$ con parte real cero.

n_+ el número de valores propios de $Df(x_0)$ con parte real positiva.

n_- el número de valores propios de $Df(x_0)$ con parte real negativa.

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

Definición 7.2. *Un punto crítico se llama punto crítico hiperbólico si $n_0 = 0$. En este caso*

si $n_+ = 0$ y $n_- = n$, decimos que $x_0 = 0$ es un atractor.

Si $n_+ = n$ y $n_- = 0$, decimos que $x_0 = 0$ es un repulsor.

Si $n_+ > 0$ y $n_- > 0$, decimos que $x_0 = 0$ es un punto silla.

Hemos visto varios ejemplos de este tipo en el caso lineal y $n = 2$, que toma la forma $\overrightarrow{x} = (x, y)$,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Los valores propios se calculan de:

$$det(\lambda I - A) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0.$$

En la figura 1 (ver archivo aparte) se divide el plano en distintas regiones de acuerdo a las raices de este polinomio. En la figura 2 (ver archivo aparte) se muestran ejemplos típicos de acuerdo a las regiones de la figura 1. Por ejemplo se tiene que en $1a$ y $2a$ los valores propios son complejos conjugados. En 1 y $1a$ $n_- = 2$ el origen es un atractor. En 2 y $2a$ $n_+ = 2$ el origen es un repulsor. En 3, $n_+ = n_- = 1$ entonces el origen es un punto silla.

Como se relacionan (7.1) y (7.2). En el caso hiperbólico lo hacen por el siguiente teorema importante.

Teorema 7.2 (Hartman y Grobmann). *Si la ecuación (7.1) tiene un punto crítico hiperbólico x_0, entonces existe una vecindad U de x_0 y una vecindad V de x_0, tal que (7.1) y (7.2) son "topológicamente equivalentes".*

Esto significa que existe una aplicación $h : U \to V$, biyectiva, continua con inversa continua que manda las órbitas de (7.1) en la vecindad U en órbitas de la vecindad de V, respetando la dirección del tiempo.

Linealización en la vecindad de un punto crítico hiperbólico y equivalencia topológica son resultados locales. Vamos a dar a continuación conceptos más globales.

En lo que sigue suponemos $n = 2$ y que x_0 un punto silla de la ecuación $x' = f(x)$.

Definición 7.3. *Definimos:*

$$W^S(x_0) = \{a \in R^n \mid x(t, a) \to x_0 \quad si \quad t \to \infty\}$$

R. Manasevich and A. Núñez, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Lecture Notes of the Course “Differential Equations” (in Spanish), Mathematic Engineering Department (DIM), Universidad de Chile, 327 pp., Mar. 2009. Revised edition.

donde $x(t,a)$ *es la solución de la ecuación tal que* $x(0,a) = a$. $W^S(x_0)$ *se llama la variedad estable de* x_0.

Similarmente:

Definición 7.4. *La variedad inestable de* x_0 *se define como el conjunto*

$$W^U(x_0) = \{a \in R^n \mid x(t,a) \to x_0 \quad si \quad t \to -\infty\}.$$

En $\mathbb{R}^2$, $W^S(x_0)$ y $W^U(x_0)$ son curvas.

Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 7.3. *Considerar la ecuación* $x' = f(x)$, $n = 2$, *y supongamos que* x_0 *es un punto silla de esta ecuación. Entonces* x_0 *es un punto silla del sistema linealizado:*

$$x' = Df(x_0)(x - x_0)$$

Denotemos por $E^S(x_0)$ y $E^U(x_0)$ los espacios propios estables e inestables del sistema linealizado y sea U una vecindad de x_0. Si

$$W^S_{loc}(x_0) = U \cap W^S(x_0),$$

entonces $W^S_{loc}(x_0)$ es tangente a $E^S(x_0)$ en x_0. Similarmente, si

$$W^U_{loc}(x_0) = U \cap W^U(x_0)$$

entonces $W^U_{loc}(x_0)$ es tangente a $E^U(x_0)$ en x_0.